

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК СССР

1988

ТОМ 300 №4

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

Э.И. ВЕЛИЕВ, академик АН УССР В.П. ШЕСТОПАЛОВ

ОБ ОДНОМ ОБЩЕМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В различных краевых задачах прикладной математической физики [1, 2] возникают следующие парные интегральные (либо сумматорные) уравнения с ядром в виде тригонометрических функций:

$$(1) \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) K(\alpha) e^{i\epsilon\alpha\eta} d\alpha = f(\eta), & |\eta| < 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) e^{i\epsilon\alpha\eta} d\alpha = 0, & |\eta| > 1. \end{cases}$$

Здесь искомая функция $h(\alpha)$ является преобразованием Фурье функции

$$\mu(\eta) = \frac{\epsilon}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) e^{-i\epsilon\alpha\eta} d\alpha,$$

которая продолжена нулем вне интервала $\eta \in [-1, 1]$, т.е. $\mu(\eta) = 0$ при $|\eta| > 1$; $\epsilon \geq 0$ — вещественный параметр, $K(\alpha)$ и $f(\eta)$ — заданные комплекснозначные функции.

Предлагается общий подход в решении (1), основанный на применении метода моментов в пространстве преобразований Фурье [3].

Заметим, что $h(\alpha)$ должна принадлежать к классу функций

$$(2) \quad \tilde{L}_2(-\infty, \infty) = \left\{ h(\alpha): \int_{-\infty}^{\infty} |h(\alpha)|^2 (|\alpha| + 1) d\alpha < \infty \right\},$$

который является естественным в задачах теории дифракции на ограниченных телах с ребрами, поскольку к нему приводит условие конечности энергии в любом ограниченном объеме пространства (условие Мейкснера) [4].

1. Исследуем систему (2) при следующих предположениях:

а) искомая функция $h(\alpha)$ является преобразованием Фурье функции $\mu(\eta)$, для которой

$$(3) \quad \mu(\eta) = \begin{cases} (1 - \eta^2)^\nu \varphi(\eta), & \eta \in [-1, 1]; \quad \frac{1}{2} \leq \nu < 1, \\ 0, & \eta \notin [-1, 1], \end{cases}$$

где $\varphi(\eta)$ — непрерывная функция, принадлежащая пространству $L_2[-1, 1; (1 - \eta^2)^\nu]$, которое является пространством регулярных функций со скалярным произведением, имеющим весовой множитель $(1 - \eta^2)^\nu$ [5, 6];

б) функция $K(\alpha)$ представима в виде

$$(4) \quad K(\alpha) = C |\alpha| [1 - \gamma(\alpha)]; \quad \gamma(-\alpha) = \gamma(\alpha),$$

где C — постоянная, а функция $\gamma(\alpha) \sim O(|\alpha|^{-1-s})$, $0 < s < 1$;

в) заданная функция $f(\eta)$ непрерывна и принадлежит пространству $L_2[-1, 1; (1 - \eta^2)^\nu]$, т.е.

$$(5) \quad f(\eta) \in L_2[-1, 1; (1 - \eta^2)^\nu].$$

Покажем, что при указанных предположениях существует единственное решение (1), принадлежащее пространству функций $\tilde{L}_2(-\infty, \infty)$.

Отметим, что наложенное на функцию $\mu(\eta)$ условие (3) является естественным для задачи дифракции на телах с ребрами (следствие условия Мейкснера) [4].

Система (1) исследовалась в основном для класса функций $\mu(\eta)$ с условием (3) при $\nu = 1/2$. При этом различными методами удается эти уравнения свести к уравнениям Фредгольма 2-го рода [1, 7–10]. Ниже излагается более общий подход к решению (1) для класса функций $\mu(\eta)$ с условием (3), где $1/2 \leq \nu < 1$, в котором как частный случай (при $\nu = 1/2$) содержатся ранее полученные результаты.

2. Учитывая, что непрерывная функция $\varphi(\eta)$ принадлежит пространству $L_2[-1, 1; (1 - \eta^2)^\nu]$, в котором полиномы Гегенбауэра $\{C_n^{\nu+1/2}(\eta)\}_{n=0}^\infty$ образуют базис [5, 6], ее можно разложить в равномерно сходящиеся ряды по этим полиномам. Тогда согласно (3) для функции $\mu(\eta)$ запишем представление

$$(6) \quad \mu(\eta) = (1 - \eta^2)^\nu \sum_{n=0}^\infty x_n C_n^{\nu+1/2}(\eta).$$

Здесь $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ — неизвестные коэффициенты. Используя (6) для преобразования Фурье $h(\alpha)$ функции $\mu(\eta)$, можно получить следующее представление:

$$(7) \quad h(\alpha) = \frac{2\pi}{\Gamma(\nu + 1/2)} \sum_{n=0}^\infty (-i)^n x_n \beta_n^{(\nu+1/2)} \frac{J_{n+\nu+1/2}(\epsilon\alpha)}{(2\epsilon\alpha)^{\nu+1/2}}, \quad \frac{1}{2} \leq \nu < 1,$$

где $J_\nu(x)$ — функции Бесселя, $\Gamma(x)$ — гамма-функция, $\beta_n^{(\nu+1/2)} = \Gamma(n+2\nu+1)/\Gamma(n+1) \sim O(n^{2\nu})$.

Ряд в (7) сходится равномерно, поскольку он получен интегрированием равномерно сходящегося ряда (6). Следовательно, для функции $h(\alpha)$ имеет место асимптотика $h(\alpha) \sim O(\alpha^{-1-\nu})$ и она принадлежит пространству $\tilde{L}_2(-\infty, \infty)$.

Из представления (7) следует, что определение функции $h(\alpha)$ сводится к нахождению коэффициентов $\{x_n\}_{n=0}^\infty$. Причем последние должны принадлежать пространству числовых последовательностей $l_2(\nu+1/2)$, где

$$(8) \quad l_2(\nu+1/2) = \left\{ x_n: \sum_{n=0}^\infty |x_n|^2 \beta_n^{(\nu+1/2)} < \infty \right\}.$$

Это следует из $h(\alpha) \in \tilde{L}_2(-\infty, \infty)$ (см. (2)).

Для определения неизвестных $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ подставим в (1) представления (3) и (7). При этом учтем, что функции $f(\eta)$, $e^{i\epsilon\alpha\eta} \in L_2[-1, 1; (1 - \eta^2)^\nu]$, и поэтому для них справедливы разложения [6]

$$(9) \quad f(\eta) = \sum_{k=0}^\infty f_k C_k^{\nu+1/2}(\eta); \quad \sum_{k=0}^\infty |f_k|^2 \frac{\beta_k^{(\nu+1/2)}}{k + \nu + 1/2} < \infty,$$

$$e^{i\epsilon\alpha\eta} = \left(\frac{2}{\epsilon\alpha} \right)^{\nu+1/2} \Gamma(\nu+1/2) \sum_{k=0}^\infty i^k (k + \nu + 1/2) J_{k+\nu+1/2}(\epsilon\alpha) C_k^{\nu+1/2}(\eta).$$

Пользуясь теперь полнотой полиномов Гегендауэра и свойством разрывных интегралов Вебера—Шафхейтлина [5], убедимся, что однородное уравнение в системе (1) удовлетворяется тождественно, а для нахождения коэффициентов $\{x_n\}_{n=0}^\infty$

существует бесконечная система линейных алгебраических уравнений вида

$$(10) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n x_n \beta_n^{(\nu+1/2)} [C_{kn}^{(\nu+1/2)} - d_{kn}^{(\nu+1/2)}] = \Gamma_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь введены обозначения

$$C_{kn}^{(\nu+1/2)} = \frac{[1 + (-1)^{k+n}] \Gamma^2(\nu+1/2) \Gamma((n+k)/2 + 1)}{\Gamma(\nu + (1+k-n)/2) \Gamma(\nu + (1+n-k)/2) \Gamma((k+n)/2 + 2\nu + 1)};$$

$$C_{kn}^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{k+1}, & k=n, \\ 0, & k \neq n; \end{cases}$$

$$(11) \quad d_{kn}^{(\nu+1/2)} = [1 + (-1)^{k+n}] K_{\nu+1/2}(\epsilon) \int_0^{\infty} \gamma(\alpha) J_{k+\nu+1/2}(\epsilon\alpha) J_{n+\nu+1/2}(\epsilon\alpha) \frac{d\alpha}{\alpha^{2\nu}},$$

$$\Gamma_k = \frac{\epsilon^{2\nu+1} K_{\nu+1/2} f_k}{2\pi C i^k (k+\nu+1/2)}; \quad K_{\nu+1/2}(\epsilon) = \frac{2\sqrt{\pi} \Gamma(\nu+1/2)}{\epsilon^{2\nu-1} \Gamma(\nu)}.$$

3. В (10) неизвестные $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in l_2(\nu+1/2)$. Однако вопросы разрешимости (существование и единственность решения) этого уравнения удобно исследовать в пространстве l_2 . Чтобы перейти к этому пространству, введем новые неизвестные

$y_n = (-i)^n x_n \sqrt{\beta_n^{(\nu+1/2)}}$, которые согласно (8) уже будут принадлежать l_2 . Тогда (10) относительно неизвестных y_n запишется в виде

$$(12) \quad \sum_{n=0}^{\infty} y_n (A_{kn}^{\nu} - Q_{kn}^{\nu}) = b_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$A_{kn}^{\nu} = \sqrt{\beta_k^{(\nu+1/2)} \beta_n^{(\nu+1/2)}} C_{kn}^{(\nu+1/2)}, \quad Q_{kn}^{\nu} = \sqrt{\beta_k^{(\nu+1/2)} \beta_n^{(\nu+1/2)}} d_{kn}^{(\nu+1/2)},$$

$$b_k = \sqrt{\beta_k^{(\nu+1/2)}} \Gamma_k.$$

Уравнения (12) в пространстве l_2 представимы в операторной форме

$$(13) \quad y(A - Q) = b.$$

Здесь y и b — вектор-столбцы, порожденные коэффициентами $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$, а операторам A и Q соответствуют матрицы $\{A_{kn}^{\nu}\}_{k,n=0}^{\infty}$ и $\{Q_{kn}^{\nu}\}_{k,n=0}^{\infty}$. Убедимся, что $b \in l_2$. Пользуясь определением в (см. (12) и (10)), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^{(\nu+1/2)} \left| \frac{f_k}{k+\nu+1/2} \right|^2.$$

Этот ряд сходится, поскольку для коэффициентов $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ существует неравенство (9), следовательно, $b \in l_2$. Далее, оператор A является симметричным, положительно определенным оператором и может быть представлен в l_2 в виде суммы единичного и вполне непрерывного операторов, т.е. $A = I + A_1$, где вполне непрерывному оператору A_1 соответствует матрица $\{A_{kn}^1\}_{k,n=0}^{\infty}$, для которой

$$A_{kn}^1 = \begin{cases} A_{kn}, & k \neq n; \quad 1/2 < \nu < 1, \\ 0, & \nu = 1/2, \end{cases} \quad A_{kk}^1 = 0.$$

Причем для матричных элементов A_{kn}^1 имеет место асимптотика $A_{kn}^1 \sim_{k, n \rightarrow \infty} O[(kn)^{-3\nu}]$.

Оператор Q в уравнении (13) является вполне непрерывным в l_2 , поскольку для его нормы, пользуясь (4) и (11), на основе неравенства Коши-Буняковского может быть получена оценка

$$\|Q\| \leq \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |Q_{kn}^{\nu}|^2 \right\}^{1/2} \leq \alpha(\epsilon, \nu, s) \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+2\nu+1)\Gamma(k+(1-s)/2)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+2\nu+(3+s)/2)} < \infty,$$

где $\alpha(\epsilon, \nu, s)$ — постоянная, зависящая от параметров ϵ, ν, s .

Таким образом, учитывая свойства операторов A и Q , операторное уравнение (13) может быть записано в виде

$$(14) \quad y[I + (A_1 - Q)] = b,$$

которое является уравнением Фредгольма 2-го рода с вполне непрерывным матричным оператором. Следовательно, можно утверждать, что решение уравнения (14) существует и оно единственно [11]. Отсюда также следует, что приближенное решение (12) с любой наперед заданной точностью может быть получено на основе метода редукции [11].

Это позволяет утверждать, что существует и единственное решение системы (1), принадлежащее пространству $\tilde{L}_2(-\infty, \infty)$, которое задается формулой (7).

4. Рассмотрим частный случай ($\nu = 1/2$). При дифракции плоской H -поляризованной волны $H = e^{ik(\alpha_0 x + \sqrt{1-\alpha_0^2} y)}$ ($\alpha_0 = \cos \vartheta$, ϑ — угол падения волны) на бесконечно тонкой и идеально проводящей плоской ленте возникает система (1) с $K(\alpha)$ и $f(\eta)$ вида

$$K(\alpha) = \sqrt{1-\alpha^2} = i|\alpha|[1-\gamma(\alpha)], \quad f(\eta) = -\frac{2\pi}{\epsilon} \sqrt{1-\alpha_0^2} e^{i\epsilon\alpha_0\eta}.$$

При этом бесконечная система линейных алгебраических уравнений, задающих решение этой задачи, примет вид

$$(15) \quad \begin{aligned} (-1)^k x_{2k} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_{2n} (2n+1) d_{2k-2n}^{(1)} &= -2i \frac{\sqrt{1-\alpha_0^2}}{\alpha_0^2} J_{2k+1}(\epsilon\alpha_0), \\ (-1)^k x_{2k+1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_{2n+1} (2n+2) d_{2k+1-2n+1}^{(1)} &= \\ &= 2 \frac{\sqrt{1-\alpha_0^2}}{\alpha_0^2} J_{2k+2}(\epsilon\alpha_0). \end{aligned}$$

Аналогичные уравнения получены в [8, 9].

Пользуясь представлением (7) для функции $h(\alpha)$ при $\nu = 1/2$, а также (15) для образцов Фурье $h(\alpha)$, можно получить интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода вида

$$(16) \quad h^{\pm}(\alpha) = -u^{\pm} K^{\pm}(\alpha, \alpha_0) \sqrt{1-\alpha_0^2} \frac{4\pi}{\epsilon} + 2 \int_0^{\infty} \beta h^{\pm}(\beta) K^{\pm}(\alpha, \beta) \gamma(\beta) d\beta; \quad u^{\pm} = \begin{Bmatrix} i \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Здесь $h^{\pm}(\alpha) = h(\alpha) \pm h(-\alpha)$, а для функций $K^{\pm}(\alpha, \beta)$ запишем представления

$$K^{+}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha\beta} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) J_{2k+1}(\epsilon\alpha) J_{2k+1}(\epsilon\beta) =$$

$$= \frac{2}{\epsilon(\alpha^2 - \beta^2)} [\alpha J_1(\epsilon\alpha) J_0(\epsilon\beta) - \beta J_0(\epsilon\alpha) J_1(\epsilon\beta)],$$

$$K^{-}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha\beta} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2) J_{2k+2}(\epsilon\alpha) J_{2k+2}(\epsilon\beta) =$$

$$= \frac{2}{\epsilon(\alpha^2 - \beta^2)} [\beta J_1(\epsilon\alpha) J_0(\epsilon\beta) - \alpha J_0(\epsilon\alpha) J_1(\epsilon\beta)].$$

Интегральные уравнения типа (16) получены в [7] методом задачи Римана—Гильберта, а в [10] методом интегрального преобразования Абеля.

Заметим, что предложенный метод решения уравнений (1) можно обобщить для парных интегральных и сумматорных уравнений с другими ядрами.

Институт радиофизики и электроники
Академии наук УССР, Харьков

Поступило
13 V 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977. 220 с.
2. Шестопалов В.П. Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. Киев: Наук. думка, 1983. 252 с.
3. Миттра Р., Гао В., Рахман-Самий Я. — Тр. Ин-та инж. по электротехн. и радиоэлектр., 1979, т. 67, № 11, с. 20–40.
4. Хенл Х., Мауэ А., Вестфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
5. Бэйтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974, т. 2. 296 с.
6. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1978. 320 с.
7. Сологуб В.Г. — ЖВМиМФ, 1971, т. 11, № 4, с. 837–853.
8. Литвиненко Л.Н., Просвириин С.Л. Спектральные операторы рассеяния в задачах дифракции волн на плоских экранах. Киев: Наук. думка, 1984. 240 с.
9. Велиев Э.И., Ахмедов Т.М. — Докл. АН УССР, 1983. Сер. А, № 3, с. 55–59.
10. Виноградов С.С., Тучкин Ю.А., Шестопалов В.П. — ДАН, 1982, т. 267, № 2, с. 330–334.
11. Конторович Л.В., Ахилев Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.