ХФТИ 95-12

Национальный научный центр
"Харьковский физико-технический институт"

К ВОПРОСУ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯДОВ В СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ СИСТЕМЕ СОПРОВОЖДЕНИЯ

Харьков - 1995

УДК 513.37.538.31

К ВОПРОСУ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯДОВ В СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ СИСТЕМЕ СОПРОВОЖДЕНИЯ: Препринт ХФТИ 95-9 / О.М.Пигнастый, Д.В.Попович, В.М. Рашкован, Н.С.Репалов, Ю.Д.Тур. Харьков: ННЦ ХФТИ, 1995.- 9 с.

Представлены результаты теоретического анализа устойчивости движения заряженных частиц в системе сопровождения, содержащей сверхпроводящие магнитные элементы. На основании теории Ляпунова об устойчивости динамических состояний относительно малых возмущений, определены критерии и найдены условия, обеспечивающие продольную и поперечную устойчивость потока.

Список лит. - 2 назв.

Просим извинить за низкое качество печати, вызванное дефицитом полиграфических материалов.

При разработке ускорителей заряженных частиц во всем диапазоне энергий ключевой проблемой является обеспечение радиальной и фазовой устойчивости их движения в процессе ускорения. От успешного решения этой задачи зависят основные технические параметры устройства - полный ток и качество фазового портрета пучка на выходе из ускорителя. Традиционные методы фокусировки пучков заряженных частиц (жесткая и переменно-фазовая фокусировка) в настоящее время реализованы в их предельных вариантах, поэтому дальнейшее совершенствование ускорителей требует принципиально новых подходов. Широкие возможности в этом направлении открывает применение в качестве элементов ускорительных трактов сверхпроводящих систем. В частности, принципиально новый подход к решению вопросов стабилизации и фокусировки пучков заряженных частиц в циклических и линейных ускорителях, заключается в разработке новых криогенных управляющих систем, основанных на использовании эффекта магнитной потенциальной ямы (МПЯ) [1].
В таких системах особое место занимает вопрос устойчивости планетарных конфигураций системы зарядов в магнитном поле сверхпроводящих витков, процесс стабилизации в которых обеспечивается при условиях проявления МПЯ.

Рассмотрим это на примере исследования устойчивости стационарного движения двух заряженных частиц в электромагнитных полях идеально проводящих контуров. Движение зарядов происходит в цилиндрической системе координат (ρ,α,z), выбранной таким образом, чтобы ось z совпадала с осью бесконечно тонких колец одинакового радиуса a, расположенных на расстоянии 2ℓ друг от друга, а начало координат находилось в точке пересечения этой оси с плоскостью, расположенной параллельно и посредине между плоскостями колец.

Для случая нерелятивистского движения S-зарядов в электромагнитном поле идеально электропроводящего контура функция Лагранжа с точностью до членов порядка $\left[\frac{v}{c}\right]^2$ имеет вид [2]:

$$L=\sum_{i=1}^{s}\frac{m_i\cdot v_i^2}{2}+\sum_{i=1}^{s}\frac{m_i\cdot v_i^4}{2\cdot c^2}+\sum_{i=1}^{s}1\cdot\Phi_{qi}+L_{11}\cdot\frac{1^2}{2}-\frac{1}{4\cdot\pi}\sum_{L=1}^{s}\frac{q_1\cdot q_j}{\varepsilon_0\varepsilon\cdot k_{ij}}+ \tag{1}$$

$$+\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{L=1}^{S}\frac{q_1\cdot q_j}{2c^2k_{ij}}\left[\bar v_i\cdot\bar v_j+\left(\bar v_i\cdot\bar n_{ij}\right)\cdot\left(\bar v_1\cdot\bar n_{ij}\right)\right]$$

где $\frac{m_1\cdot v_1^2}{2}$ кинетическая энергия заряженной частицы

m_1 - масса частицы

v_1 -скорость заряженной частицы

$\Phi_{ij} \cdot 1$ -обуславливает взаимодействие заряженной частицы с идеально проводящим контуром;

Φ_{ij} - поток, создаваемый 1-м зарядом через идеально проводящий контур - ток в идеально проводящем контуре;

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=j}^{s}\frac{q_i \cdot q_j}{k_{ij}}$ - потенциальная энергия взаимодействия зарядов (кулоновское взаимодействие);

q_i - заряд частиц;

k_{ij} - расстояние между двумя заряженными частицами, находящимися во взаимодействии;

ε_0 - физическая постоянная;

$\sum_{i=1}^{s}\frac{q_i \cdot q_j}{2c^2 k_{ij}}\cdot\left[v_i \cdot v_j + (v_i \cdot n_{ij})\cdot(v_j \cdot n_{ij})\right]$ - поправка к энергии взаимодействия между частицами, найденная с точностью до членов $\left(\frac{v}{c}\right)^2$;

n_{ij} - единичный вектор в направлении между q_i и q_j.

В случае двух заряженных частиц функция Лагранжа принимает вид:

$$L = \sum_{i=1}^{2}\frac{m_i \cdot v_i^2}{2} + \left\{1 + \frac{v_i^2}{4 \cdot c^2}\right\} + \sum_{i=1}^{2} 1 \cdot \Phi_{ij} + L_{11}\cdot\frac{1^2}{2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 \cdot q_2}{k_{12}}\cdot\left\{1 - \frac{v_1 \cdot v_2 + (v_1 \cdot n_{12})\cdot(v_2 \cdot n_{12})}{2 \cdot c^2}\right\}. \tag{2}$$

Стационарное движение по круговой орбите накладывает на систему необходимые условия устойчивости

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{m_i \cdot v_i^2}{2} + \left\{1 + \frac{v_i^2}{4 \cdot c^2}\right\}\right] + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\sum_{i=1}^{2} 1 \cdot \Phi_{ij}\right] - \\ \qquad \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 k_{12}}\cdot\left\{1 - \frac{v_1 \cdot v_2 + (v_1 \cdot n_{12})\cdot(v_2 \cdot n_{12})}{2 \cdot c^2}\right\}\right]_0 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = \left[\frac{\partial}{\partial z}\left[\sum_{i=1}^{2} 1 - \Phi_{ij}\right] - \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 k_{12}}\cdot\left\{1 \frac{v_1 \cdot v_2 + (v_1 \cdot n_{12})\cdot(v_2 \cdot n_{12})}{2 \cdot c^2}\right\}\right]\right]_0 = 0 . \end{cases} \tag{3}$$

Данные условия должны выполняться для любой орбиты. Принимая это во внимание и полагая, что движения заряженной частицы являются медленными

$\left(\frac{v}{c} << 1\right)$, релятивистскими поправками к фигурным скобкам можно пренебречь и мы получим функцию Лагранжа

$$L = \sum_{i=1}^{2} \frac{m_i \cdot v_i^2}{2} + \sum_{i=1}^{2} I \cdot \Phi_{ij} + L_{11} \cdot \frac{I^2}{2} - \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{R_{12}} . \qquad (4)$$

Для анализа стационарного движения введем безразмерные параметры и параметры системы:

$x_{1j} = \frac{\rho_j}{r_1}$ - безразмерный радиус орбиты j-ой частицы;

$x_{2j} = \varphi_j$ - безразмерная угловая координата j-ой частицы;

$x_{3j} = \frac{z_j}{r_1}$ - безразмерная высота (вертикальное отклонение от плоскости орбиты при стационарном движении);

r_1-радиус идеально проводящего контура;

$$\dot{x}_{1j} = \frac{dx_{1j}}{d\tau}, \qquad \dot{x}_{2j} = \frac{dx_{2j}}{d\tau}, \qquad \dot{x}_{3j} = \frac{dx_{3j}}{d\tau} \qquad (5)$$

представляют собой скорости соответствующих безразмерных координат.

$\tau = \omega \cdot t$, где ω имеет размерность 1/с, а t представляет собой координату во времени.

Величину ω выберем так

$$\omega = \frac{\Phi}{r_1 \cdot \sqrt{L_{11} \cdot m}} \qquad \text{при } \Phi \neq 0$$

$$\omega = \frac{\beta}{m \cdot r^2} \qquad \text{при } \Phi = 0, \qquad \text{где}$$

m_1 - масса первой частицы,

Φ - замороженный поток в контуре,

β - момент количества движения системы.

Введем еще безразмерные константы,

$$\mu_0 = \frac{\beta}{\Phi} \sqrt{\frac{L_1}{m}} \cdot \frac{1}{r_1}, \qquad \mu_0 = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{r_1} \cdot \frac{L_{11}}{\Phi^2}; \qquad \mu_2 = \frac{q \cdot \mu_0}{2\pi \cdot \sqrt{L_{11} \cdot m}},$$

$$D_j = \frac{\sqrt{x_{1j}}}{k_j} \left[\left(2 - k_j^2\right) \cdot K_j - 2 \cdot E_j \right], \qquad k_j = \frac{2 \cdot \sqrt{x_{1j}}}{\sqrt{\left(1 + x_{1j}\right)^2 + \left(x_{3j}\right)^2}};$$

К уже вводимым ранее константам μ_0 и μ_1 добавилась еще μ_2, характеризующая собой кулоновское взаимодействие частиц, а также безразмерный ток и безразмерная скорость частиц.

Поток, создаваемый j-ой частицей через идеально проводящий контур, представим в виде:

$$\Phi_{\varphi} = \oint A_{\varphi} \cdot dl = \dot{\varphi}_j \cdot \mu_2 \cdot \sqrt{L_{11} \cdot m_1} \cdot r_1 \cdot D_j \; ; \tag{6}$$

$$\dot{\varphi}(j) = \chi_1(j) \cdot \left[\frac{\phi}{r_1 \cdot \sqrt{L_{11} \cdot m}} \right], \qquad N = \frac{I}{\left[\frac{\phi}{L_{11}} \right]} . \tag{7}$$

Выразим через безразмерные параметры расстояние R_{12} между частицами

$$R_{12} = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2 \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + (z_2 - z_1)^2} =$$
$$= r_1 \cdot \sqrt{[x_{11}]^2 + [x_{11}]^2 + 2 \cdot x_{11} \cdot x_{22} \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + [x_{32} - x_{31}]^2} \; .$$

Введем новые координаты:

$$\chi_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}, \quad \chi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, \qquad \text{где} \qquad \varphi_1 = \chi_1 + \chi_2, \quad \varphi_2 = \chi_2 - \chi_1 \tag{8}$$

и подставим их в функцию Лагранжа (4):

$$L = \frac{m_1 \cdot \dot{\rho}_1^2}{2} + \frac{m_1 \cdot \rho_1^2 \cdot \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{m_1 \cdot \dot{z}_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot \dot{\rho}_2^2}{2} + \frac{m_2 \cdot \rho_2^2 \cdot \dot{\varphi}_2^2}{2} +$$
$$+ \frac{m_2 \cdot \dot{z}_2^2}{2} + \dot{\varphi}_1 \cdot f_1 \cdot I + \dot{\varphi}_2 \cdot f_2 \cdot I + L_{11} \cdot \frac{1^2}{2} -$$
$$- \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{q_2}{\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2 \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + (z_2 - z_1)^2}} =$$
$$= \sum_{i=1}^{2} \frac{m_i \cdot \dot{\rho}_i^2}{2} + \sum_{i=1}^{2} \frac{m_i \cdot \dot{z}_i^2}{2} + \frac{m_1 \cdot \rho_1^2 \cdot (\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2)^2}{2} +$$
$$+ \frac{m_2 \cdot \rho_2^2 \cdot (\dot{\chi}_2 - \dot{\chi}_1)^2}{2} + (\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2) \cdot f_1 \cdot I + (\dot{\chi}_2 - \dot{\chi}_1)^2 \cdot f_2 \cdot I + L_{11} \cdot \frac{1^2}{2} -$$
$$- \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2 \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \cos(2 \cdot \chi_1) + (z_2 - z_1)^2}} \; ,$$

где

$$f_j = \frac{\Phi_{\varphi}}{\dot{\varphi}_j} = r_1 \cdot \sqrt{L_{11} \cdot m_1} \cdot \mu_2 \cdot D_j \; .$$

После введения новых переменных χ_j, мы получим новую функцию Лагранжа, содержащую циклические обобщенные скорости I и χ_2.

Этим циклическим координатам отвечают два первых интеграла движения, представляющие собой закон сохранения момента количества движения и постоянства магнитного потокосцепления:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\chi}_1} = m_1 \cdot \rho_1^2 \cdot (\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2) + m_2 \cdot \rho_2^2 (\dot{\chi}_1 - \dot{\chi}_2) + [f_1 + f_2] \cdot \dot{I} = \beta \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{I}} = (\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2) \cdot f_1 + (\dot{\chi}_1 - \dot{\chi}_2) \cdot f_2 + L_{11} \cdot \dot{I} = \Phi \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} \dot{\chi}_1 \cdot [m_1 \cdot \rho_1^2 + \rho_2^2] + [f_1 + f_2] \cdot \dot{I} = \beta - \dot{\chi}_2 \cdot [m_1 \cdot \rho_1^2 - m_2 \cdot \rho_2^2] \\ \dot{\chi}_2 \cdot [f_1 + f_2] + \dot{I} \cdot L_{11} = \Phi - \dot{\chi}_1 \cdot [f_1 - f_2] \end{cases} , \tag{10}$$

Перейдем от функции Лагранжа к функции Гамильтона. Данный переход обусловлен тем, что функцию Рауса трудно разделить на части, одна из которых зависит только от координат, а другая от скоростей, причем разделение производится с точностью до членов второго порядка разложения в ряд Маклорена относительно положения равновесия:

$$H = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L =$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}_1} \dot{\rho}_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}_2} \dot{\rho}_2 + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_2} \dot{z}_2 + \frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}_1} \dot{\chi}_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}_2} \dot{\chi}_2 + \frac{\partial L}{\partial \dot{I}} \dot{I} - L . \tag{11}$$

Подставляя данные выражения в функцию Гамильтона, получаем :

$$H = \sum_{j=1}^{2} \frac{m_j \cdot \dot{\rho}_j^2}{2} + \sum_{j=1}^{2} \frac{m_j \cdot \dot{z}_j^2}{2} + \dot{\chi}_1^2 \cdot \sum_{j=1}^{2} \frac{m_j \cdot \rho_j^2}{2} + W, \tag{12}$$

где

$$W = \frac{1}{2} \cdot \dot{I} \cdot [\Phi + \dot{\chi}_1 \cdot (f_1 - f_2)] +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \dot{\chi}_2 \cdot \left[\Phi + \chi_1 \cdot \left(m_1 \cdot \rho_1^2 - m_2 \cdot \rho_2^2\right)\right] . \tag{13}$$

Видно, что члены, не вошедшие в функцию W являются определенно положительными с точностью до второго порядка малости при разложения в ряд Маклорена в окрестности равновесной орбиты.

Найдем выражение I и χ_2 из (10) и подставим в функцию W:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \beta - \chi_1 \cdot \left(m_1 \cdot \rho_1^2 - m_2 \cdot \rho_2^2\right) & f_1 + f_2 \\ \Phi - \dot{\chi}_1 \cdot (f_1 - f_2) & L_{11} \end{vmatrix} ;$$

$$\Delta_\chi = \begin{vmatrix} m_1 \cdot \rho_1^2 + m_2 \cdot \rho_2^2 & \beta - \chi_1 \cdot (m_1 \cdot \rho_1^2 - m_2 \cdot \rho_2^2)_2 \\ f_1 + f_2 & \Phi - \chi_1 \cdot (f_1 - f_2) \end{vmatrix} ;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} m_1 \cdot \rho_1^2 - m_2 \cdot \rho_2^2 & f_1 + f_2 \\ f_1 - f_2 & L_{11} \end{vmatrix} ;$$

$$\begin{cases} \chi = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{[\beta - \chi_1 \cdot (m \cdot \rho^2 - m \cdot \rho^2)] \cdot L_{11} - [\Phi - \chi_1 \cdot (f_1 - f_2)] \cdot (f_1 + f_2)}{(m \cdot \rho^2 + m \cdot \rho^2) \cdot L_{11} - (f_1 + f_2)^2} \\ l = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{[m \cdot \rho^2 + m \cdot \rho^2][\Phi - \chi_1 \cdot (f_1 - f_2)] - (f_1 + f_2) \cdot [\beta - \chi_1 \cdot (m \cdot \rho^2 - m \cdot \rho^2)]}{(m \cdot \rho^2 + m \cdot \rho^2) \cdot L_{11} - (f_1 + f_2)^2} \end{cases}$$

Итак, получив с точностью до квадратичных членов включительно $W()$, имеем :

$$W = W_0 + \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2 \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \cos(2 \cdot \chi) + (z_1 - z_2)^2}} ; \qquad (14)$$

$$W = \frac{[m_1 \cdot \rho_1^2 + m_2 \cdot \rho_2^2] \cdot \Phi^2 - 2 \cdot \Phi \cdot \beta \cdot (f_1 + f_2) + L_{11} \cdot \beta^2}{2 \cdot \Delta} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2 \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \cos(2 \cdot \chi) + (z_1 - z_2)^2}} .$$

Введем обозначения:

$$m \cdot \rho^2 = \sum_{j=1}^{N} m_j \cdot \rho_j^2 = a_{11}, N = 2 \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{N} f_j = a_{12} . \qquad (15)$$

С учетом этих обозначений :

$$W = \frac{a_{11} \cdot \Phi^2 - 2 \cdot \Phi \cdot \beta \cdot a_{12} + a_{22} \cdot \beta^2}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2 \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \cos(2 \cdot \chi) + (z_1 - z_2)^2}} . \qquad (16)$$

Видно, что (16) напоминает выражение для изменённой потенциальной энергии частицы в поле идеально проводящего контура при наличии внешнего поля, энергия которого представлена в виде

$$\frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1\cdot q_2}{\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\cdot\rho_1\cdot\rho_2\cdot\cos(2\cdot\chi)+(z_1-z_2)^2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{i\neq j}^{n}\frac{q_i\cdot q_j}{R_{ij}} \quad (17)$$

Запишем в безразмерном виде

$$W=\frac{\mu_0^2-2\cdot\mu_0\cdot\mu_1\cdot(D_1+D_2)+x_{11}^2+x_{21}^2}{x_{11}^2+x_{21}^2-\mu_0^2\cdot(D_1+D_2)^2}+$$

$$+\frac{\mu_1}{\sqrt{x_{11}^2+x_{21}^2-2\cdot\cos\chi_{0}\cdot\chi_1\cdot\chi_2+(\chi_{11}-\chi_{21})^2}} \quad (18)$$

Для того, чтобы система была устойчива, необходимо выполнение необходимых условий

$$\left.\frac{\partial W}{\partial x_{1j}}\right|_0=0\,, \qquad \left.\frac{\partial W}{\partial x_{3j}}\right|_0=0\,. \quad (19)$$

Т.к. второе условие в плоскости орбиты выполняется автоматически, то требуется выполнить одно условие

$$\left.\frac{\partial W}{\partial x_{11}}\right|_0=\frac{-\mu_1\cdot\dfrac{\partial D_1}{\partial\chi_{11}}}{\chi_{11}^2-\mu_0^2\cdot 2\cdot D_1^2}\cdot\mu_0+\frac{\chi_{11}^2}{\chi_{11}^2-\mu_0^2\cdot 2\cdot D_1^2}+\frac{-\left[\chi_{11}-\mu_1^2\cdot 2\cdot D_1\cdot\dfrac{\partial D_1}{\partial\chi_{11}}\right]}{2\cdot\left[\chi_{11}^2-2\cdot\mu_1^2\cdot 2\cdot D_1^2\right]}\cdot\mu_0^2+$$

$$+\frac{4\cdot\mu_1\cdot D_1\cdot\left[\chi_{11}-\mu_1\cdot 2\cdot D_1\cdot\dfrac{\partial D_1}{\partial\chi_{11}}\right]}{2\cdot\left[\chi_{11}^2-2\cdot\mu_1^2\cdot 2\cdot D_1^2\right]^2}\cdot\mu_0+\frac{-2\cdot\chi_{11}^2}{2\cdot\left[\chi_{11}^2-\mu_1^2\cdot 2\cdot D_1^2\right]^2}- \quad (20)$$

$$-\frac{\mu_1}{4\cdot\chi_0^2}=0\,.$$

Вводя обозначения:

$$
\begin{cases}
A = \dfrac{-\left[x_u - \mu_1^2 \cdot 2 \cdot D_1 \cdot \dfrac{\partial D_1}{\partial x_u}\right]}{2 \cdot \left[x_u^2 - 2 \cdot \mu_1^2 \cdot 2 \cdot D_1^2\right]^2}; \\
B = \dfrac{-\mu_1 \cdot \dfrac{\partial D_1}{\partial x_u}}{x_u^2 - \mu_1^2 \cdot 2 \cdot D_1^2} + \dfrac{4 \cdot \mu_1 \cdot D_1 \cdot \left[x_u - \mu_1 \cdot 2 \cdot D_1 \cdot \dfrac{\partial D_1}{\partial x_u}\right]}{2 \cdot \left[x_u^2 - 2 \cdot \mu_1^2 \cdot 2 \cdot D_1^2\right]^2}; \\
C = \dfrac{x_u^2}{x_u^2 - \mu_1^2 \cdot 2 \cdot D_1^2} + \dfrac{-2 \cdot x_u^2}{2 \cdot \left[x_u^2 - \mu_1^2 \cdot 2 \cdot D_1^2\right]^2} - \dfrac{\mu_1}{4 \cdot x_u^2};
\end{cases}
$$

Получим необходимое условие устойчивости в виде:

$$\mu_0^2 + \frac{B}{A} \cdot \mu_0 + \frac{C}{A} = 0\,; \tag{21}$$

$$\mu_{0_{1,2}} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}}{2 \cdot A} \tag{22}$$

Пусть система испытывает возмущения

$$x_{1j} = x_{1j}\big|_0 + y_{1j}\,, \quad x_{3j} = x_{3j}\big|_0 + y_{3j}\,, \quad x_1 = x_1\big|_0 + y_1\,. \tag{23}$$

Тогда функцию W возможно разложить в ряд Маклорена в окрестности начала координат :

$$
\begin{aligned}
W(x_{1j}, x_2, x_{3j}) - W(x_{1j}, x_2, x_{3j})\Big|_0 &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial W}{\partial x_{1j} \cdot \partial x_{1i}}\Big|_0 \cdot y_{1j} \cdot y_{1i} + \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 W}{\partial x_{3j} \cdot \partial x_{3i}}\Big|_0 \cdot y_{3i} \cdot y_{3j} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial W}{\partial x_1^2}\Big|_0 \cdot y_1^2 + \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial W}{\partial x_{1j} \cdot \partial x_{3i}}\Big|_0 \cdot y_{1j} \cdot y_{3i} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial W}{\partial x_{1j} \cdot \partial x_1}\Big|_0 \cdot y_1 \cdot y_{1j} + \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial W}{\partial x_{3j} \cdot \partial x_1}\Big|_0 \cdot y_1 \cdot y_{3j} + O(y^3).
\end{aligned}
$$

Последнее выражение представляет собой функцию Ляпунова для системы два заряда-идеально проводящее кольцо. Линейные члены разложения уничтожаются в силу необходимых условий устойчивости (20).

Функция W обладает такими свойствами, что

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial w}{\partial x_{1j}\cdot\partial x_{3i}}\Big|_0 = 0 \qquad \dfrac{\partial w}{\partial x_{1j}\cdot\partial x_{1}}\Big|_0 = 0 \qquad \dfrac{\partial w}{\partial x_{3j}\cdot\partial x_{1}}\Big|_0 = 0 \\
\dfrac{\partial w}{\partial x_{11}}\Big|_0 = \dfrac{\partial w}{\partial x_{12}}\Big|_0 \qquad \dfrac{\partial w}{\partial x_{31}}\Big|_0 = \dfrac{\partial w}{\partial x_{32}}\Big|_0
\end{cases} \tag{24}
$$

Отсюда имеем функцию Ляпунова в виде квадратичной формы Ляпунова

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x_{11}^2}\Big|_0\cdot y_{11}^2 + \frac{\partial w}{\partial x_{11}\cdot\partial x_{12}}\Big|_0\cdot y_{11}\cdot y_{12} + \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x_{12}^2}\Big|_0\cdot y_{12}^2 + \\
&+\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x_{31}^2}\Big|_0\cdot y_{31}^2 + \frac{\partial w}{\partial x_{31}\cdot\partial x_{32}}\Big|_0\cdot y_{31}\cdot y_{32} + \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x_{32}^2}\Big|_0\cdot y_{32}^2 + \\
&+\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x_{1}^2}\Big|_0\cdot y_{1}^2 .
\end{aligned} \tag{25}
$$

Согласно критерию Сильвестра, вещественная квадратичная форма (26) будет определенно положительной, если все главные миноры ее дискременанта положительны, что обеспечивается выполнением неравенств.

Это дает нам неравенства :

$$
\frac{\partial^2 w}{\partial x_{11}^2}\Big|_0 > 0; \qquad \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_{11}^2}\Big|_0\right] - \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_{11}\cdot\partial x_{12}}\Big|_0\right]^2 > 0 \tag{26}
$$

относительно устойчивости по радиусу.

$$
\frac{\partial^2 w}{\partial x_{31}^2}\Big|_0 > 0; \qquad \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_{31}^2}\Big|_0\right] - \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_{31}\cdot\partial x_{32}}\Big|_0\right]^2 > 0
$$

относительно устойчивости по фазе

$\frac{\partial^2 w}{\partial x_{1}^2}\Big|_0 > 0;$ относительно устойчивости по азимуту.

Численные эксперименты показывают, что неравенства (27) выполняются в широком диапазоне магнитных и геометрических параметров системы, что является оптимистическим с точки зрения создания высокоэффективных стабилизирующих и управляющих криогенных систем для ускорителей заряженных частиц с использованием эффекта МПЯ.

Литература

[1]Михалачев В.С., Корозев В.В., Рашкован В.М., и др. "Магнитная потенциальная яма - эффект стабилизации сверхпроводящих динамических систем." Киев: Наук. думка, 1991.-336 с.

[2] Korsunsky A.M., Repalov N.S., Tur Yu.D. Control of the Parameters of Electromagnetic Field in the Linear Accelerators - Particle Accelerators, 1980, vol.11, p.11-17.

Цена договорная. Индекс 3624

Препринт, 1995, I-9.

Олег Михайлович Пигнастый, Дмитрий Васильевич Попович,
Василий Маркович Рашкован, Николай Семенович Репалов,
Юрий Дмитриевич Тур

К ВОПРОСУ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯДОВ
В СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ СИСТЕМЕ СОПРОВОЖДЕНИЯ

Ответственный за выпуск Л.М.Ракивненко

Редактор, корректор Т.И.Бережная

Подписано в печать 31.05.95. Формат 60x84/16. Бум.писч.№I. Офсетн.печ.
Усл.п.л. 0,8. Уч.-изд.л. 0,5. Тираж 70. Заказ №97. Индекс 3624.
Цена договорная.

Национальный научный центр "Харьковский физико-технический институт" (ННЦ ХФТИ)
310108, г.Харьков, ул.Академическая,I