УДК 658.51.012

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАКРОСКОПИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ СИСТЕМЫ С МАССОВЫМ ВЫПУСКОМ ПРОДУКЦИИ

В.П. Демуцкий[1], В.С. Пигнастая[2], О.М. Пигнастый[2]
[1]Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина,
Физико-технический факультет, 61108, Харьков, пр. Курчатова 31, demutskie@mail.ru,
[2]НПФ Технология, 61170, Харьков, ул. Котлова 10/12, E-mail: techpom@online.kharkov.ua
Поступила в редакцию 16 мая 2005 г.

На основе законов статистической физики построена математическая модель для описания системы с массовым выпуском продукции. Состояние системы в любой момент времени задается точкой в двумерном фазовом пространстве. Введена функция распределения для базового продукта (элемента системы) и для нее записано уравнение, являющееся аналогом кинетического уравнения в физике. Введены и определены инженерно-производственная и генераторная функции. В нулевом приближении записана замкнутая система уравнений для моментов функции распределения (система уравнений балансов). Моменты функции распеределения имеют смысл измеряемых макроскопических параметров системы.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: синергетика, базовый продукт, микроскопическое описание, функция распределения, инженерно-производственная функция, генераторная функция, уравнения балансов

В настоящее время законы статистической физики все чаще используются для построения математических моделей процессов в самых разных смежных областях знаний. Подобные модели строятся и для описания экономических процессов (так называемая «физическая экономика»). Публикации на эту тему появляются и в физических журналах [1,2].

Основная цель работы построить, используя законы статистической физики, математическую модель системы с массовым выпуском продукции.

В современных рыночных условиях хозяйствования предприятие, как сложная социально-экономическая система, находится в процессе постоянных внутренних и внешних изменений. С одной стороны, предприятие вынуждено приспосабливаться к постоянно изменяющимся процессам внешних условий хозяйствования, с другой стороны, не менее важным источником изменений служат процессы самоорганизации и усложнения факторов внутренней среды предприятия. Течение процесса внутриорганизационных изменений не является хаотичным и непредсказуемым, а подчиняется действию комплекса социальных, экономических, организационных законов и закономерностей. В этих условиях основу процесса развития предприятия составляет разработка соответствующей модели стратегии, реализацию которой можно рассматривать как трансформационный процесс [1]. Результирующие стратегии призваны стабилизировать движение предприятия в рассматриваемом внешнем окружающем пространстве в выбранном направлении. Сам же процесс формирования стратегии часто сводится к разработке модели планирования возникновения изменений факторов внешней и внутренней среды, а также модели оптимального управления ими. Закономерности, присущие равновесным состояниям в системах экономического обмена, во многом аналогичны тем, которые имеют место в физических (термодинамических) системах. Они оказались столь глубокими и полезными, что провозглашены для термодинамических систем и систем экономического обмена в качестве неких общих принципов: Ле Шателье-Самуэльсона, Карно-Хикса и др. [3]. С легкой руки немецкого физика-теоретика Германа Хакена введенный термин «синергетика» получил достаточно широкое признание как некоторое общее название междисциплинарной области, занимающейся изучением самоорганизации сложных процессов и систем. Не только в физике, но и в других науках, изучающих развитие и функционирование больших систем (в частности в экономической теории развития предприятий), приходится встречаться с самоорганизацией. Синергетика, как наука о самоорганизации, включила в себе общность интересов и математических методов исследования родственных нелинейных явлений в поведении больших систем. Очевидно, что исследование соотношений, которые могут существовать между детерминированной динамикой и вероятностными процессами поведения элементов больших систем, существенно для обоснования поведения больших систем.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ

Как хорошо известно, стохастические процессы позволяют сформулировать модели поведения больших систем, которые способные описать необратимую эволюцию системы и допускают функционал Ляпунова или Н-функцию. Таким образом, важный вопрос состоит в том, как совершить переход от детерминированной динамики к вероятностному процессу. Процедура получения основного кинетического уравнения из динамики элементов большой системы обычно начинается с сокращения описания или укрупнения ячеек. На основании данных принципов описания больших систем функционирование современного массового производства может быть представлено в виде стохастического процесса, в ходе которого производственная система переходит из одного состояния в другое [4 с.178]. Состояние системы можно определить как состояние общего числа N базовых продуктов производственной системы. Под базовым продуктом (или предметом труда) будем понимать элемент производственной системы, на который происходит перенос стоимости живого труда, сырья, материалов и орудий труда в ходе его движения по операционной цепочке технологических карт. В ходе такого движения происходит превращение исходного сырья и материалов в готовый продукт путем целенаправленного воздействия общественнополезного труда. Поведение базового продукта подчиняется определенным законам в соответствии с установленным на предприятии технологическим процессом, производственным планом, наличием трудовых ресурсов и оборудования. Состояние базового продукта будем описывать микроскопическими величинами (S_j, μ_j), где S_j (грн) и $\mu_j = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S_j}{\Delta t}$ (грн/час) соответственно сумма общих затрат и затрат в единицу времени, перенесенные производственной системой на j-й базовый продукт, $0 < j \le N$. Состояние системы в некоторый момент времени будет определено, если определены микроскопические величины $(S_1, \mu_1; \ldots\ldots S_N, \mu_N)$, а в любой другой момент времени найдено из уравнений состояния базовых продуктов:

$$\frac{dS_j}{dt} = \mu_j, \qquad \frac{d\mu_j}{dt} = f_j(t,S), \tag{1}$$

где $f_j(t,S)$ - инженерно-производственная функция, характеризующая установленный на предприятии технологический процесс изготовления продукции в соответствии с производственным планом, наличием трудовых ресурсов и оборудования. Однако, если количество базовых продуктов N много больше единицы, то решить систему (1) из $2 \cdot N$-уравнений практически невозможно. Последнее уточнение требует перехода от микроскопического описания производственной системы к макроскопическому с элементами вероятностной природы. Основная трудность в таком описании состоит в том, чтобы выделить характеристики микросостояний базовых продуктов, которые можно было бы измерить на уровне состояния предприятия. Вместо того, чтобы рассматривать состояние производственной системы с микровеличинами $(S_1, \mu_1; \ldots\ldots S_N, \mu_N)$, введем соответствующим образом нормированную дискретную функцию распределения числа N базовых продуктов в фазовом пространстве (S, μ). Каждая точка в данном пространстве будет задавать состояние базового продукта. Разумно ожидать, что при больших N эту функцию
будет хорошо аппроксимировать непрерывная функция распределения базовых продуктов $\chi(t,S,\mu)$. Если производственная система состоит из нескольких видов базовых продуктов, то для описания системы потребуется получить функцию распределения для каждого вида базовых продуктов.

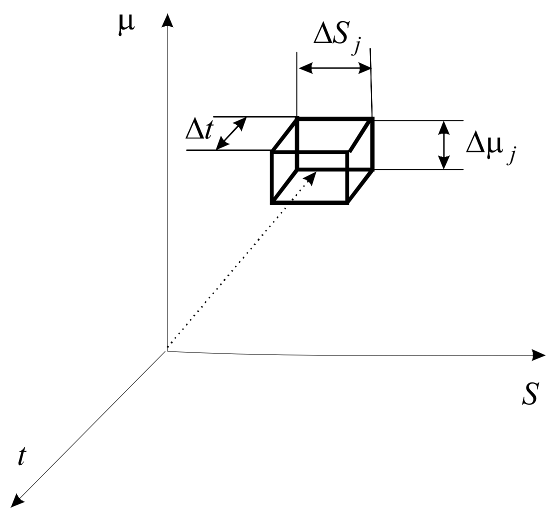

Рис.1. Элемент фазового пространства производственной системы

Разобьем фазовое пространство на такое число ячеек, чтобы размеры ячейки $\Delta\Omega = \Delta S \cdot \Delta\mu$ были много меньше характерных размеров производственной системы и в то же время содержали внутри себя большое число базовых продуктов. Вместо того, чтобы фиксировать точные значения микроскопических величин базового продукта, будем приближенно характеризовать состояние производственной системы числом базовых продуктов в каждой ячейке $\Delta\Omega$. Если размеры ячейки достаточно малы, то приближенное описание будет нести в себе почти столь же подробную информацию, чтои точное. Таким образом, мы приходим к необходимости наряду с основным пределом при $N \to \infty$, рассматривать и предельный случай при стремящихся к нулю размерах ячейки.

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ СИСТЕМЫ С МАССОВЫМ ВЫПУСКОМ ПРОДУКЦИИ

В силу того, что величина $\chi(t,S,\mu)\cdot d\Omega$ представляет собой число базовых продуктов в бесконечно малой ячейке $\Delta\Omega$ фазового пространства (S,μ), мы можем по изменению фазовой координаты S и фазовой скорости μ базового продукта со временем судить и об изменении самой функции $\chi(t,S,\mu)$ [5 гл.2]:

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{\partial\chi}{\partial S}\cdot\mu+\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\cdot f(t,S)=J(t,S,\mu). \tag{2}$$

Это и есть кинетическое уравнение для функции распределения $\chi(t,S,\mu)$.

Скорость изменения затрат μ базового продукта и функция $f(t,S)$ может быть найдена из системы уравнений состояния базового продукта (1):

$$\frac{dS}{dt}=\mu; \qquad \frac{d\mu}{dt}=f(t,S), \tag{3}$$

а генераторная функция $J(t,S,\mu)$ определяется плотностью оборудования вдоль технологической цепочки и его техническими характеристиками [5]. Функция $J(t,S,\mu)$ при $t\to\infty$ стремится свести начальное распределение базовых продуктов по скоростям изменения затрат к состоянию с равновесной функцией распределения в соответствии с технологическим процессом. Будем считать функцию $\chi(t,S,\mu)$ нормированной

$$\int_0^\infty dS\cdot\int_0^\infty d\mu\cdot\chi(t,S,\mu)=N. \tag{4}$$

Условие нормировки (5) представляет собой закон сохранения количества базовых продуктов, находящихся в производственном процессе. Инженерно-производственная функция $f(t,S)$ определяется из документооборота предприятия: таблиц норм расходов сырья (материалов), нормативных цен на сырье (материалы), сменных норм и расценок за выполнение работником технологических операций. Выразив в денежном выражении из документооборота предприятия стоимость затрат сырья, потребляемого в ходе технологической операции, расценку и время выполнения технологической операции, можно в табличном виде получить зависимость для скорости изменения затрат $\mu_\kappa=\mu(t_\kappa)$ при движении базового продукта вдоль технологической цепочки: $f(t,S)=\lim\limits_{\Delta t_k\to 0}\dfrac{\Delta\mu_k}{\Delta t_k}$. По своему смыслу инженерно-производственная функция представляет собой некий аналог силы, перемещающий базовый продукт вдоль технологической цепочки производственного процесса. При таком перемещении на базовый продукт оказывается воздействие со стороны орудий труда (оборудования). Таким образом происходит увеличение затрат, перенесенных на базовый продукт при его движении вдоль технологической цепочки производственного процесса. Оборудование воздействует на базовый продукт, изменяя его качественно и количественно. Мы можем говорить только о вероятности того, что после воздействия со стороны технологического оборудования базовый продукт будет находиться в том или ином состоянии. Процесс воздействия со стороны технологического оборудования на базовый продукт будем обозначать $[\mu\to\tilde{\mu}]$, где μ и $\tilde{\mu}$ - соответственно скорости изменения затрат, которые несет базовый продукт до и после воздействия. Полное же количество базовых продуктов, находящихся в единице объема фазового пространства и испытавших в единицу времени воздействие со стороны технологического оборудования, можно написать в виде произведения потока базовых продуктов $\chi(t,S,\mu)\cdot\mu$ на вероятность для каждого из них испытать воздействие $[\mu\to\tilde{\mu}]$ в некотором малом элементе $d\Omega$ фазового пространства (S,μ). Что касается вероятности испытать воздействие $[\mu\to\tilde{\mu}]$, то о ней можно, по крайней мере, утверждать, что вероятности испытать воздействие пропорциональна плотности расположения оборудования $\lambda_{оборуд}$ вдоль технологической цепочки. Таким образом, число базовых продуктов, испытавших в единицу времени воздействие со стороны технологического оборудования и принявшие значения в пределах $(\tilde{\mu};\tilde{\mu}+d\tilde{\mu})$, можно написать в виде

$$\psi[\mu\to\tilde{\mu}]\cdot\lambda_{оборуд}\cdot\mu\cdot\chi(t,S,\mu)\cdot d\tilde{\mu}\cdot dS\cdot d\mu, \tag{5}$$

где $\psi[\mu \to \tilde{\mu}]$ - функция, определяемая паспортными данными работы технологического оборудования. Некоторые свойства этой функции могут быть получены из весьма общих соображений, если представить, что полная вероятность перехода в любое состояние равна единице:

$$\int_0^\infty \psi[\mu \to \tilde{\mu}] \cdot d\tilde{\mu} = 1. \tag{6}$$

Наряду с этим в элемент объема $dS \cdot d\mu$ поступают базовые продукты из объема $dS \cdot d\tilde{\mu}$ посредством обратного перехода $\psi[\tilde{\mu} \to \mu]$ в количестве:

$$\psi[\tilde{\mu} \to \mu] \cdot \lambda_{оборуд} \cdot \tilde{\mu} \cdot \chi(t,S,\tilde{\mu}) \cdot d\tilde{\mu} \cdot dS \cdot d\mu, \tag{7}$$

а общее число базовых продуктов в элементе объема $d\Omega$ изменяется в единицу времени на величину:

$$d\Omega \cdot J = d\Omega \cdot \lambda_{оборуд} \cdot \int_0^\infty \{\psi[\tilde{\mu} \to \mu] \cdot \tilde{\mu} \cdot \chi(t,S,\tilde{\mu}) - \psi[\mu \to \tilde{\mu}] \cdot \mu \cdot \chi(t,S,\mu)\} d\tilde{\mu}. \tag{8}$$

Принимая во внимание нормировочное свойство (6) функции $\psi[\mu \to \tilde{\mu}]$, уравнение (2) можно представить в виде:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial S} \cdot \mu + \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \cdot f(t,S) = \lambda_{оборуд} \cdot \left\{ \int_0^\infty [\psi[\tilde{\mu} \to \mu] \cdot \tilde{\mu} \cdot \chi(t,S,\tilde{\mu})] \cdot d\tilde{\mu} - \mu \cdot \chi \right\}. \tag{9}$$

В большинстве интересных с практической точки зрения случаях функция $\psi[\tilde{\mu} \to \mu]$ не зависит от состояния базового продукта до испытания воздействия $\tilde{\mu}$ со стороны технологического оборудования, что приводит к упрощению интегро-дифференциального уравнения (9):

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial S} \cdot \mu + \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \cdot f(t,S) = \lambda_{оборуд} \cdot \{\psi[\tilde{\mu} \to \mu] \cdot [\chi]_1 - \mu \cdot \chi\}. \tag{10}$$

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МАКРОПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ

Нулевой $\int_0^\infty d\mu \cdot \chi(t,S,\mu) = [\chi]_0$ и первый $\int_0^\infty d\mu \cdot \mu \cdot \chi(t,S,\mu) = [\chi]_1 = \langle\mu\rangle \cdot [\chi]_0$ моменты функции распределения имеют простую производственную интерпретацию: заделы базовых продуктов и их темп движения вдоль технологической цепочки. С помощью моментов функции распределения можно записать систему уравнений для описания макровеличин производственной системы. Умножив уравнение (10) соответственно на 1, μ, $\frac{\mu^2}{2}$ и проинтегрировав по всему диапазону μ, получим уравнения балансов [6 с.196]:

$$\frac{\partial [\chi]_0}{\partial t} + \frac{\partial (\langle\mu\rangle \cdot [\chi]_0)}{\partial S} = \int_0^\infty d\mu \cdot J,$$

$$\frac{\partial (\langle\mu\rangle \cdot [\chi]_0)}{\partial t} + \frac{\partial (\langle\mu\rangle^2 \cdot [\chi]_0)}{\partial S} = -\frac{\partial P}{\partial S} + f(t,S) \cdot [\chi]_0 + \int_0^\infty d\mu \cdot \mu \cdot J, \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{ \frac{\langle\mu\rangle^2 \cdot [\chi]_0}{2} + \frac{P}{2} \right\} + \frac{\partial}{\partial S}\left(\langle\mu\rangle \cdot \left\{ \frac{\langle\mu\rangle^2 \cdot [\chi]_0}{2} + \frac{3 \cdot P}{2} \right\} + \Theta \right) = f(t,S) \cdot [\chi]_1 + \int_0^\infty d\mu \cdot \frac{\mu^2}{2} \cdot J,$$

в которых $\int_0^\infty d\mu \cdot (\mu - \langle\mu\rangle)^2 \cdot \chi = P(t,S)$;

$$\int_0^\infty d\mu \cdot \left(\mu - \langle\mu\rangle\right) \cdot \frac{\left(\mu - \langle\mu\rangle\right)^2}{2} \cdot \chi = \Theta(t,S).$$

Уравнения балансов (11), представляющие собой уравнения заделов, темпа и дисперсии базовых продуктов вдоль технологической цепочки, незамкнуты. Возможность получить замкнутую систему уравнений основана на свойствах функции $\psi[\tilde{\mu} \to \mu]$ и наличии малого параметра $Kv = \frac{l_{св}}{\xi} << 1$ [5 гл.2], представляющего собой отношение длины свободного движения $l_{св}$ базовых продуктов вдоль технологической цепочки между единицами оборудования к характерному размеру технологической цепочки. В нулевом приближении по малому параметру $Kv << 1$ имеем

$$J = \sum_{m=0}^{\infty} (Kv)^m \cdot J_m; \qquad J_0 = \lambda_{оборуд} \cdot \left\{\psi[\tilde{\mu} \to \mu] \cdot [\chi]_1 - \mu \cdot \chi\right\} = 0 \tag{12}$$

и из уравнения балансов (11) следует замкнутая система уравнений для описания производственной системы

$$\begin{gathered}
\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t} + \frac{\partial\left([\chi]_0 \cdot \langle\mu\rangle\right)}{\partial S} = 0, \\
\frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial t} + \langle\mu\rangle \cdot \frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial S} = -\frac{1}{[\chi]_0} \cdot \frac{\partial P(t,S)}{\partial S} + f(t,S), \\
\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial P(t,S)}{\partial t} + P \cdot \frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial S} + \frac{\partial\Theta_\Psi}{\partial S} = 0,
\end{gathered} \tag{13}$$

где

$$\Theta_\Psi = \langle\mu\rangle \cdot \left\{\frac{[\chi]_0 \cdot \sigma_\psi^{\ 2}}{2} + \frac{[\chi]_0 \cdot \left(\mu_\psi - \langle\mu\rangle\right)^2}{2}\right\}, \qquad \Theta(t,S) = \Theta_\Psi(t,S) - \frac{\langle\mu\rangle}{2} \cdot P,$$

а μ_ψ и $\sigma_\psi^{\ 2}$ определены как

$$\int_0^\infty \mu \cdot \psi[\mu \to \tilde{\mu}] \cdot d\tilde{\mu} = \mu_\psi; \qquad \int_0^\infty \left(\mu - \mu_\psi\right)^2 \cdot \psi[\mu \to \tilde{\mu}] \cdot d\tilde{\mu} = \sigma_\psi^{\ 2} \tag{14}$$

и задаются паспортными данными оборудования.

Если положить заданным темп базовых продуктов $[\chi]_1(t,S)$ вдоль технологической цепочки, то в качестве частного случая из системы уравнений (13) получаем известное в кибернетической экономике уравнение уровня Форрестера [7 с.170], которое в настоящее время является основным уравнением для описания функционирования производственно-сбытовых систем.

Замкнутая система уравнений балансов заметно упрощается в случае стационарного протекания производственного процесса. Под стационарным (или установившимся) подразумевается такое протекание производственного процесса, при котором в каждой точке технологической цепочки макроскопические величины $[\chi]_0$, $\langle\mu\rangle$, P остаются постоянными во времени. Другими словами, макроскопические величины $[\chi]_0$, $\langle\mu\rangle$, P являются функцией одной только координаты S, так что

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial P}{\partial t} = 0.$$

Система уравнений балансов (13) сводится в этом случае к виду

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\left([\chi]_0 \cdot \langle\mu\rangle\right)}{\partial S} = 0, \\
\langle\mu\rangle \cdot \frac{\partial\langle\mu\rangle}{\partial S} = -\frac{1}{[\chi]_0} \cdot \frac{\partial P(S)}{\partial S} + f(S),
\end{gathered} \tag{15}$$

$$P \cdot \frac{\partial \langle \mu \rangle}{\partial S} + \frac{\partial \Theta_{\Psi}}{\partial S} = 0$$

или $[\chi]_1 = const$; $[\chi]_0 \cdot \langle \mu \rangle^2 + P(S) + F(S) = const$; $P \cdot \frac{\partial \langle \mu \rangle}{\partial S} + \frac{\partial \Theta_{\Psi}}{\partial S} = 0$. (16)

Интегральная инженерно-производственная функция $F(S)$ определенна как $f(S) \cdot [\chi]_0 = -\frac{\partial F(S)}{\partial S}$.

ВЫВОДЫ

Таким образом, в нулевом приближении по малому параметру Kv форма функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\chi(t, S, \mu)$ для описания функционирования производственной системы определяется уравнением (10). Моменты функции распределения $\chi(t, S, \mu)$ удовлетворяют замкнутой системе уравнений (13), которая служит для описания поведения макроскопических параметров идеальной производственной системы. Идеальность производственной системы заключается в отсутствии для замкнутой системы уравнений (13) в нулевом приближении по малому параметру Kv членов, описывающих диссипативные производственные процессы.

Авторы искренне признательны и благодарны академику НАНУ С.В. Пелетминскому и профессору ХНУ В.Д. Ходусову за обсуждение материалов при подготовке статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рушицький Я.Я., Мілованов Т.С. Модифікована модель Філіпса-Лоренца для єкономічної системи (корпорації фірм) із стабільним капіталом // Доповіді Національної академії наук України. – 1997.– N12.– С.36-40.
2. Чернавский Д.С., Старков Н.И., Щербаков А.В. О проблемах физической экономики // Успехи физических наук. – 2002. – Т.172. - N12. – С.1045-1066.
3. Вильсон А.Дж. Энтропийные методы моделирования сложных систем: Пер.с англ.- М.: Наука, 1978 – 248с.
4. Прыткин Б.В. Технико-экономический анализ производства. –М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 399с.
5. Демуцкий В.П., Пигнастая В.С., Пигнастый О.М. Теория предприятия: Устойчивость функционирования массового производства и продвижения продукции на рынок. – Харьков: ХНУ, 2003. – 272с.
6. Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 608с.
7. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия. – М.: Прогресс, 1961. – 341с.

MACROSCOPIC EQUATIONS FOR DESCRIPTION OF ECONOMIC ENGINEERING SYSTEMS WITH MASS PRODUCTION OUTPUT

V.P. Demutsky[1], V.S. Pignastaya[2], O.M. Pignasty[2]
[1]Kharkov National University 61108 Kharkov, 31 Kurchatov st, Ukraine
Department of Theoretical Nuclear Physics,
E-mail: demutskie@mail.ru,
[2]NPF Technology, 61052, Kharkov, 10/12 Kotlov st, Ukraine,
E-mail: techpom@online.kharkov.ua

A mathematical model of mass production dynamics in engineering is constructed. The state of production system at any moment is given by a point in two-dimentional phase space. Distribution function for base product is introduced and the equation for this function is written. There is the analogy of kinetic equation in physics. The engineering-production and generative functions are defined.

KEY WORDS: synergetic, basic product, macroscopic description, distribution function, engineering-production function, generative function, equations of balance.