

Викладено метод знаходження траєкторії точки, яка мінімізує час руху при дії відцентрової сили інерції (задача про брахістохрону для відцентрової сили). Представлено результати застосування теорії для знаходження оптимальної форми лопатки ґрунтометателя

Ключові слова: відцентрова сила інерції, функціонал, рівняння Ейлера, оптимальна форма

Изложен метод нахождения траектории точки, минимизирующей время движения при действии центробежной силы инерции (задача о брахистохроне для центробежной силы). Представлены результаты применения теории для нахождения оптимальной формы лопатки ґрунтометателя

Ключевые слова: центробежная сила инерции, функционал, уравнение Эйлера, оптимальная форма

Method of determining of point's trajectory that minimizes motion time under the action of centrifugal force of inertia is stated (brachistochrone problem for centrifugal force). The results of the theory application for finding of the optimum form of ground-thruster blade are presented

Keywords: centrifugal inertia force, functional, Euler equation, optimum form

ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ, ПЕРЕМЕЩАЮЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЦЕНТРОБЕЖНОЙ СИЛЫ ИНЕРЦИИ

В.М. Шатохин

Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой

Кафедра теоретической механики

Харьковский национальный университет строительства и архитектуры

ул. Сумская, 40, г. Харьков, Украина, 61002

Контактный тел.: (057) 700-14-61

E-mail: shatokhin_v@mail.ru

Н.В. Шатохина

Кандидат технических наук, доцент

Кафедра стратегического управления

Национальный технический университет

“Харьковский политехнический институт”

ул. Фрунзе, 21, г. Харьков, Украина, 61002

Контактный тел.: (057) 707-68-24

E-mail: shatosha@mail.ru

Введение

При создании ряда технических (технологических) устройств возникает задача выбора оптимальной формы направляющих, в которых движутся некоторые частицы под действием центробежных сил. В частности, актуальной является проблема создания ґрунтометальных механизмов, используемых для гашения пожаров в местностях, где отсутствуют источники воды [1, 2]. Рядом достоинств обладают роторные ґрунтометатели [2, 3], которые ґрунт в зону возгорания выбрасывают с помощью лопаток, расположенных на вращающемся роторе. От формы и расположения лопаток существенно зависят технологические характеристики устройств.

Задача выбора оптимальной формы лопатки может быть схематизирована, как задача определения формы кривой в поле центробежных сил инерции, которая обеспечивает минимальное время движения (задача о брахистохроне в поле центробежных сил).

Известно, что классическая задача о брахистохроне для однородного поля сил тяжести была отправной точкой при создании вариационного исчисления [4]. Решения аналогичных задач для случая центральной силы притяжения и постоянной по величине цен-

тральной силы отталкивания предпринимались в [5]. Методы построения оптимальных траекторий, когда на точку действует центробежная сила инерции, авторам неизвестны.

В данной статье предложен метод решения задачи о брахистохроне для центральной силы, которая является центробежной силой инерции. Функционал времени построен в полярной системе координат. Для соответствующего уравнения Эйлера получен его первый интеграл в форме дифференциального уравнения первого порядка. Найдено аналитическое решение указанного уравнения. Установлено, что в зависимости от параметров траектории математическая запись решения имеет разную структуру. Приведены результаты расчетов траекторий для нахождения оптимальной формы лопатки ґрунтометателя.

1. Построение функционала времени

Пусть точки А и В расположены в центральном поле сил отталкивания – центробежных сил. Проведем через точки А, В и центр отталкивания плоскость и рассмотрим кривые, соединяющие эти точки и расположенные в данной плоскости. Выберем из

этих кривых такую, что материальная точка, выходящая из А со скоростью $v_0 = 0$, двигаясь только под действием центробежной силы, достигнет точки В за минимальное время.

Решение задачи и вывод функционала времени движения удобно проводить в полярной системе координат. Рассмотрим центробежное поле отталкивания с центром в точке О. Введем полярную систему координат ρ, ϕ с центром в указанной точке (рис. 1). Текущие координаты точки М обозначим, как ρ и ϕ ; координаты точек А и В пусть будут соответственно (ρ_0, ϕ_0) и (ρ_1, ϕ_1) .

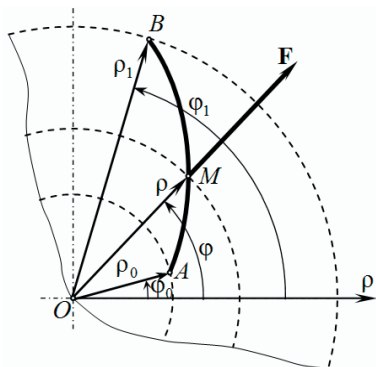


Рис. 1. Схема для построения брахистохроны в поле центробежных сил

Проекция центробежной силы инерции материальной точки, связанной с вращающимся телом, на направление радиуса ρ имеет вид

$$F_p = ma_\omega = m\omega^2\rho, \quad (1)$$

где

m – масса точки;

$a_\omega = \omega^2\rho$ – осестремительное (нормальное) ускорение;

ω – угловая скорость.

Тогда выражение для потенциальной энергии центробежной силы инерции можно представить так [6]:

$$\Pi = \int_{\rho_0}^{\rho} F_p d\rho = m\omega^2 \int_{\rho_0}^{\rho} \rho d\rho = -\frac{m\omega^2}{2} \rho^2. \quad (2)$$

При записи формулы (2) принималось, что начальным положением для определения потенциальной энергии является отталкивающий центр (точка О), в котором потенциальная энергия равна нулю.

В равномерно вращающейся вокруг неподвижной оси системе координат, если пренебречь силами трения и сопротивления, имеет место закон сохранения энергии в относительном движении [6]

$$T + \Pi = h = \text{const}, \quad (3)$$

где

$T = \frac{1}{2}mv^2$ – кинетическая энергия точки в относительном движении по отношению к вращающейся системе координат;

$$h = -\frac{m\omega^2}{2}\rho_0^2 \text{ – постоянная энергии.}$$

В дальнейшем полагаем, что в формуле (3) учитывается только потенциальная энергия центробежной силы инерции. С точки зрения приложений это наиболее важный случай. В технологических устройствах угловая скорость такова, что влияние сил тяжести на движение точки незначительно. При анализе движения в горизонтальной плоскости эта оговорка вообще оказывается излишней.

С учетом выражения (2) формула (3) приобретает вид

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{m\omega^2}{2}\rho^2 = -\frac{m\omega^2}{2}\rho_0^2. \quad (4)$$

Откуда имеем для скорости точки

$$v = \omega\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2} \quad (\rho \geq \rho_0). \quad (5)$$

Из определения алгебраической величины скорости (проекция скорости на касательную к траектории) $v = v_\tau = \frac{ds}{dt}$, выражения для квадрата дифференциала дуги в полярных координатах $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2$ и формулы (5) следует, что

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}{\omega\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2}} d\phi, \quad (6)$$

$$\text{где } \rho' = \frac{d\rho}{d\phi}.$$

Заметим, что при отсчете дуги в направлении движения точки дифференциал пути будет совпадать с дифференциалом дуговой координаты ds , а модуль скорости точки с ее алгебраической величиной $v = v_\tau$.

Интегрируя, получим функционал

$$\tau[\rho(\phi)] = \frac{1}{\omega} \int_{\phi_0}^{\phi_1} \frac{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}{\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2}} d\phi. \quad (7)$$

2. Поиск экстремума функционала

Для подынтегральной функции введем следующее обозначение

$$P = P(\rho, \rho') = \frac{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}{\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2}}. \quad (8)$$

На кривой, реализующей экстремум рассматриваемого функционала, должно выполняться условие

$$P_\rho - \frac{d}{d\phi} P_{\rho'} \equiv 0, \quad (9)$$

где $P_\rho, P_{\rho'}$ – производные от P соответственно по ρ и ρ' .

Это условие вытекает из необходимых условий экстремума функционала (7) [4].

Таким образом, искомая функция $\rho = \rho(\phi)$ является решением дифференциального уравнения второго порядка (9), или в развернутом виде

$$P_p - P_{\phi p'} - P_{\rho p'} \rho' - P_{\rho' p'} \rho'' = 0, \quad (10)$$

$$\text{где } \rho'' = \frac{d^2 \rho}{d\phi^2}.$$

Уравнение (10) является уравнением Эйлера. В рассматриваемом случае P

зависит лишь от ρ и ρ' , поэтому фактически оно является более компактным

$$P_p - P_{\rho p'} \rho' - P_{\rho' p'} \rho'' = 0, \quad (11)$$

так как $P_{\phi p'} = 0$.

Если умножить почленно это уравнение на ρ' , то левая часть превращается в точную производную

$$\frac{d}{d\phi} (P - \rho' P_{\rho'}).$$

Следовательно, уравнение Эйлера имеет первый интеграл

$$P - \rho' P_{\rho'} = \frac{1}{C}. \quad (12)$$

В рассматриваемом случае

$$P_{\rho'} = \frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}},$$

поэтому формула (12) приобретает вид

$$\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}} = \frac{1}{C}. \quad (13)$$

Из выражения (13) после упрощений получаем,

$$\frac{d\rho}{d\phi} = \rho \sqrt{\frac{C^2 \rho^2}{(\rho^2 - \rho_0^2)} - 1}. \quad (14)$$

Дифференциальное уравнение (14) допускает аналитическое решение (громоздкие выкладки здесь не приводятся)

$$\phi = \begin{cases} \arctg z + \frac{1}{z} + C_1, & C^2 = 1, \\ \arctg z - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \arctg \frac{z}{\sqrt{1-C^2}} + C_1, & C^2 < 1, \\ \arctg z - \frac{1}{2\sqrt{C^2-1}} \ln \left| \frac{z - \sqrt{C^2-1}}{z + \sqrt{C^2-1}} \right| + C_1, & C^2 > 1, \end{cases} \quad (15)$$

где

$$z = \sqrt{\frac{C^2 \rho^2}{\rho^2 - \rho_0^2} - 1}. \quad (16)$$

Для нахождения постоянных C и C_1 с учетом (16) выпишем краевые условия:

$$\text{при } \phi = \phi_0 \quad \rho = \rho_0, \quad z = z(\rho_0) = z_0 = \sqrt{\frac{C^2 \rho_0^2}{\rho_0^2 - \rho_0^2} - 1} = \infty; \quad (17)$$

$$\text{при } \phi = \phi_1 \quad \rho = \rho_1, \quad z = z(\rho_1) = z_1 = \sqrt{\frac{C^2 \rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1}. \quad (18)$$

На левой границе соотношения (15) приобретают вид

$$\phi_0 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + C_1, & C^2 = 1, \\ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \frac{\pi}{2} + C_1, & C^2 < 1, \\ \frac{\pi}{2} + C_1, & C^2 > 1. \end{cases} \quad (19)$$

Из выражений (19) следует, что

$$C_1 = \begin{cases} \phi_0 - \frac{\pi}{2}, & C^2 = 1, \\ \phi_0 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \right) \frac{\pi}{2}, & C^2 < 1, \\ \phi_0 - \frac{\pi}{2}, & C^2 > 1. \end{cases} \quad (20)$$

На правой границе соотношения (15) дают

$$\phi_1 = \begin{cases} \arctg z_1 + \frac{1}{z_1} + C_1, & C^2 = 1, \\ \arctg z_1 - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \arctg \frac{z_1}{\sqrt{1-C^2}} + C_1, & C^2 < 1, \\ \arctg z_1 - \frac{1}{2\sqrt{C^2-1}} \ln \left| \frac{z_1 - \sqrt{C^2-1}}{z_1 + \sqrt{C^2-1}} \right| + C_1, & C^2 > 1. \end{cases} \quad (21)$$

Аналогично (20) для C_1 из выражения (21) имеем

$$C_1 = \begin{cases} \phi_1 - \arctg z_1 - \frac{1}{z_1}, & C^2 = 1, \\ \phi_1 - \arctg z_1 + \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \arctg \frac{z_1}{\sqrt{1-C^2}}, & C^2 < 1, \\ \phi_1 - \arctg z_1 + \frac{1}{2\sqrt{C^2-1}} \ln \left| \frac{z_1 - \sqrt{C^2-1}}{z_1 + \sqrt{C^2-1}} \right|, & C^2 > 1. \end{cases} \quad (22)$$

Для практики наибольший интерес представляют случаи, когда $C^2 < 1$ и $C^2 > 1$.

3. Расчетные исследования по выбору оптимальной формы лопаток грунтometателя

На рис. 2 показана схема грунтometателя: 1 – ступица; 2 – кольцо; 3 – спица; 4 – криволинейная лопатка.

Предполагается, что метатель вращается с угловой скоростью ω против хода часовых стрелок. Радиусы R_1 и R_2 представляют собой радиусы окружностей, проходящих через заднюю и переднюю кромки ло-

патки. В изложенной выше теории им соответствуют полярные радиусы ρ_0 и ρ_1 .

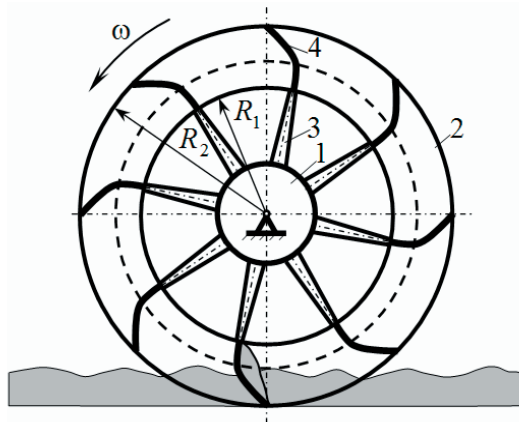


Рис. 2. Схема грунтометательного механизма

1. $C^2 < 1$.

Для нахождения константы C воспользуемся трансцендентным уравнением, следующим из сравнения правых частей соответствующих строк выражений (22) и (20) при учете краевого условия (18)

$$f(x) = \phi_1 - \arctg \sqrt{\frac{x \rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \arctg \sqrt{\frac{x \rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1} - \phi_0 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) \frac{\pi}{2} = 0, \quad (23)$$

где $x = C^2$.

В среде MathCAD при наличии графика $f(x)$ (рис. 3) корень функции удобно находить с использованием встроенной функции $\text{root}(f(x), x, a, b)$.

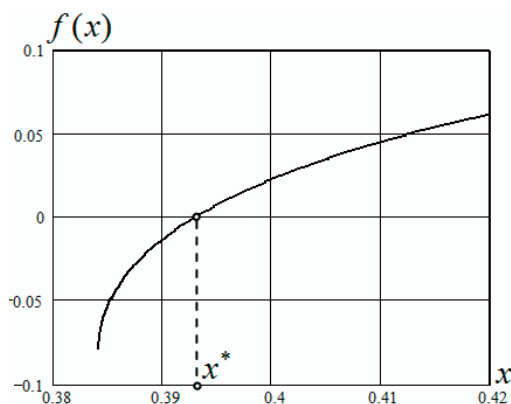


Рис. 3. График функции $f(x)$

Для корня $f(x)$ (устройство с параметрами: $\rho_0 = 0,496$ м, $\rho_1 = 0,632$ м, $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = 20^\circ$) получено значение $x^* = 0,393 < 1$, которому соответствует $C = \sqrt{x^*} = 0,627$.

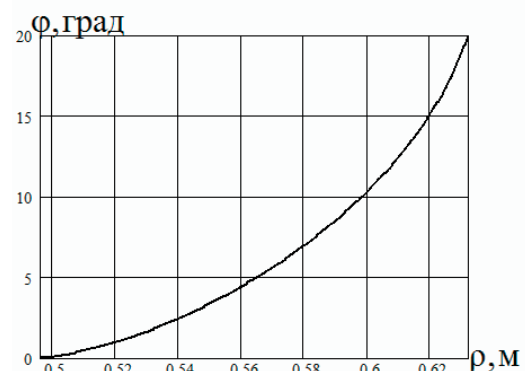
В соответствии со вторым выражением (20) или (22) при учете (18) для C_1 , имеем

$$C_1 = \phi_0 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\right) \frac{\pi}{2} = \phi_1 - \arctg \sqrt{\frac{C^2 \rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1} + \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \arctg \sqrt{\frac{C^2 \rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1} = 0,445$$

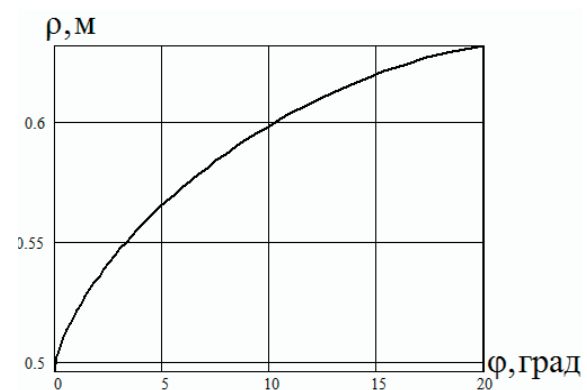
Найденные значения постоянных C и C_1 с помощью формул (15) и (16) позволяют записать следующее выражение для искомой функции

$$\phi(\rho) = \arctg \sqrt{\frac{C^2 \rho^2}{\rho^2 - \rho_0^2} - 1} - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \arctg \sqrt{\frac{C^2 \rho^2}{\rho^2 - \rho_0^2} - 1} + C_1. \quad (24)$$

График этой функции представлен на рис. 4,а; более удобный для анализа график обратной функции $\rho(\phi)$ — на рис. 4,б.



а)



б)

Рис. 4. График функции $\phi(\rho)$ — а), график функции $\rho(\phi)$ — б)

2. $C^2 > 1$.

Аналогично предыдущему пункту для нахождения константы C воспользуемся трансцендентным уравнением, следующим из сравнения правых частей соответствующих строк выражений (22) и (20) при учете краевого условия (18)

$$f(x) = \phi_1 - \arctg \sqrt{\frac{x \rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1} + \frac{1}{2\sqrt{C^2 - 1}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{x \rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1} - \sqrt{C^2 - 1}}{\sqrt{\frac{x \rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1} + \sqrt{C^2 - 1}} \right| - \phi_0 + \frac{\pi}{2} = 0, \quad (25)$$

где $x = C^2$.

Для корня $f(x)$ (устройство с параметрами: $\rho_0 = 0,3$ м, $\rho_1 = 0,632$ м, $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = 20^\circ$) получено значение $x^* = 2,576 > 1$, которому соответствует $C = \sqrt{x^*} = 1,605$.

В соответствии с третьим выражением (20) или (22) при учете (18) для C_1 , имеем

$$C_1 = \phi_0 - \frac{\pi}{2} = \phi_1 - \arctg \sqrt{\frac{x \rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1} + \frac{1}{2\sqrt{C^2 - 1}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{x \rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1} - \sqrt{C^2 - 1}}{\sqrt{\frac{x \rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1} + \sqrt{C^2 - 1}} \right| = -1,571.$$

После определения постоянных C и C_1 , можно пользоваться выражением (15) для искомой функции, которое с учетом формулы (16) приобретает вид

$$\phi(\rho) = \arctg \sqrt{\frac{C^2 \rho^2}{\rho^2 - \rho_0^2} - 1} - \frac{1}{2\sqrt{C^2 - 1}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{C^2 \rho^2}{\rho^2 - \rho_0^2} - 1} - \sqrt{C^2 - 1}}{\sqrt{\frac{C^2 \rho^2}{\rho^2 - \rho_0^2} - 1} + \sqrt{C^2 - 1}} \right| + C_1. \quad (26)$$

График функции $\phi(\rho)$ представлен на рис. 5а; график обратной функции $\rho(\phi)$ – на рис. 5б.

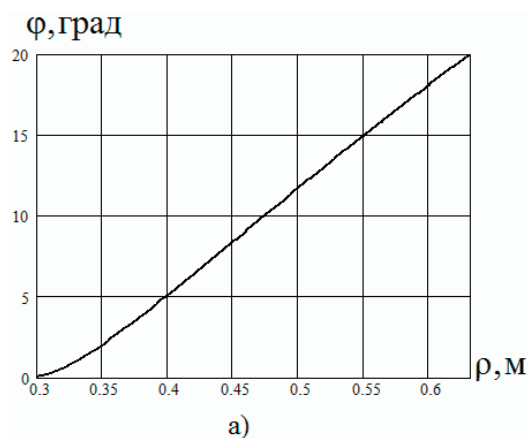


Рис. 6. Графики функций $\rho(\phi)$ для предельных значений ρ_0^* ($C^2 < 1$) при разных значениях ϕ_1

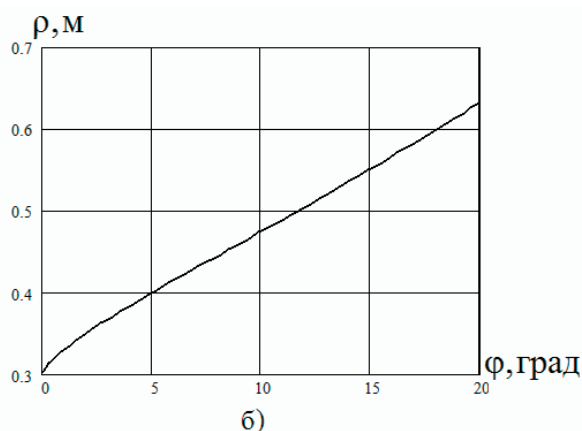
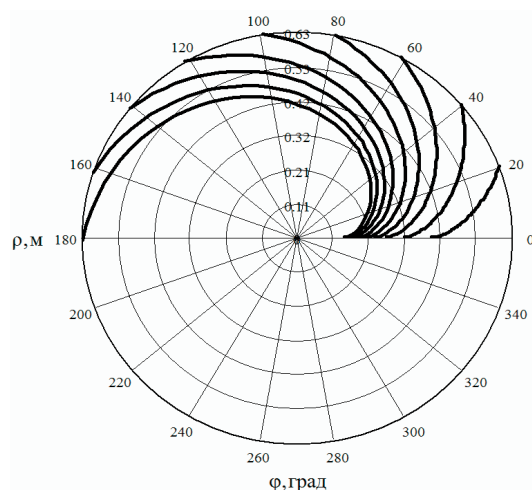


Рис. 5. График функции $\phi(\rho)$ – а), график функции $\rho(\phi)$ – б)

Выводы

1. Разработан метод решения задачи о брахистохроне для точки, движущейся под действием центробежной силы инерции.
2. Построен функционал времени в полярной системе координат.
3. Получен первый интеграл уравнения Эйлера в форме дифференциального уравнения первого порядка и найдено его аналитическое решение.
4. Установлена зависимость математического описания оптимальных траекторий от значений координат начальной и конечной точек.
5. Приведены результаты расчетов траекторий для выбора оптимальной формы лопатки грунтотметателя.

Дальнейшие исследования могут быть продолжены в нескольких направлениях.

В частности, теоретический интерес представляет детальное изучение зависимости свойств оптималь-

ных траекторий от параметров; с технологической точки зрения важными являются исследования по построению оптимальных траекторий при учете сил трения.

Литература

1. Семків, О.М. Розрахунок робочого органа ланцюгового ґрунтометального механізму [Текст] / О.М. Семків, В.М. Шатохін // Міжвідомчий науково-технічний збірник "Прикладна геометрія та інженерна графіка". - Випуск 87.- К.: КНУБА, 2011.-С. 303-312.
2. Попова, А.М. Дослідження руху частки ґрунту по лопатці: результати комп'ютерних експериментів [Текст] / А.М. Попова, В.М. Шатохін // XIV Міжнародна науково-практична конференція. Сучасні проблеми геометричного моделювання: - Тези доповідей.- Україна, Мелітополь.- 2012.- С. 18.
3. Семків, О.М. Дослідження траєкторії руху частки ґрунту після її вильоту з робочої поверхні лопатки роторного ґрунтометальника [Текст] / О.М. Семків, А.М. Попова // XIV Міжнародна науково-практична конференція. - Сучасні проблеми геометричного моделювання: Тези доповідей.- Україна, Мелітополь.- 2012.-С. 20.
4. Эльсгольц, Л.В. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление [Текст] / Л.В. Эльсгольц // -М.: Наука, 1969.- 279 с.
5. Геронимус, Я.Л. Вариационные методы решения задач оптимизации: Учеб. пособие [Текст] / Я.Л. Геронимус, Б.Л. Голинский // Харьков: Харьк. авиац. ин-т, 1987.- 114 с.
6. Лойцянский, Л.Г. Курс теоретической механики [Текст] / Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье // в 2-х томах. т. II. Динамика. -М.: Наука, 1983.- 640 с.

Розглянуто питання динаміки середовища, явищ автоколивань, резонансу в роторних апаратах, які впливають на мови їх функціонування. Викладена методика розрахунку оптимального конструювання деталей роторного апарату

Ключові слова: середовище, роторний апарат, розрахунок, динаміка

Рассмотрены вопросы динамики среды, явлений автоколебаний, резонанса в роторных аппаратах, влияющих на условия их функционирования. Изложены обобщенная методика расчета и методика оптимального конструирования деталей роторного аппарата

Ключевые слова: среда, роторный аппарат, расчет, динамика

The problems of the dynamics of the medium, the phenomena of self-oscillations, the resonance in rotary machines, affecting the conditions of their operation are considered. A generalized method for calculating the optimal design and methodology of the rotary machine parts is presented

Keywords: environment, rotary phone, the calculation of the dynamics

УДК 515.1

ОСНОВЫ ТЕОРИИ И РАСЧЕТА ДЕТАЛЕЙ РОТОРНОГО АППАРАТА

И.В. Питак

Кандидат технических наук, доцент
Кафедра химической техники и
промышленной экологии
Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт»
ул. Фрунзе, 21, г. Харьков, Украина, 61002
Контактный тел.: (057) 707-62-57
E-mail: ipitak@rambler.ru

1. Введение

В настоящее время в практику вводятся аппараты для гидромеханических, тепло- и массообменных процессов, в которых применяют различные устройства, интенсифицирующие процесс. Их действие основано на возбуждении низко- или высокочастотных колебаний в жидкости. Наблюдения различных авторов

показали, что воздействие акустических колебаний ускоряет самые разнообразные процессы.

Роторные аппараты обладают целым рядом преимуществ по сравнению с другими устройствами, возбуждающими колебания различного спектра частоты и интенсивности в обрабатываемой среде.

Роторные аппараты находят широкое применение для интенсификации технологических процессов в