Лекция 4

План лекции

1.7.6 Теорема гипотез
1.7.7 Независимые повторные испытания
1.7.7.1 Формула Бернулли
1.7.7.2 Локальная теорема Лапласа
1.7.7.3 Интегральная теорема Лапласа

1.7.6 Теорема гипотез (формула Бейеса)

Эта теорема - следствие теоремы умножения и формулы полной вероятности и позволяет уточнять вероятности появления событий -гипотез от опыта к опыту.

Пусть имеется полная группа событий – гипотез $H_1, H_2, \dots, H_n$. Вероятности появлений этих событий , с которыми связано событие А, до проведения опыта известны и равны соответственно: $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$.

Производится опыт, в результате которого событие А происходит.

<u>Теорема:</u> Если в результате опыта происходит событие А, появление которого определяется гипотезами $H_1, H_2, \dots, H_n$, то вероятности этих гипотез изменятся, и эти изменения описываются формулой

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)},$$

где $P(H_i/A)$ – апостериорная вероятность $\boldsymbol{i^{-ой}}$- гипотезы, если событие А произошло

Доказательство:

Согласно теореме умножения вероятность одновременного появления двух событий равна:

$$P(AH_i) = P(A)\,P(H_i/A) = P(H_i)P(A/H_i)\,, \qquad i = 1,2, \dots, n\,.$$

Отсюда

$$P(A)\,P(H_i/A) = P(H_i)\,P(A/H_i)\,, \qquad i = 1,2, \dots, n$$

В этом равенстве $P(H_i/A)$ - условная вероятность события H_i, рассчитанная при условии , что событие А произошло , а $P(A)$ - это априорная вероятность появления события А , которую находят по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)\,.$$

Пример: На заводе 40% приборов собирают из высококачественных деталей (гипотеза H_1), а 60% - из деталей обычного качества (гипотеза H_2). Вероятность отказа в течение гарантийного срока q_1 = 0,05; q_2 = 0,3. В течение гарантийного срока отказов не произошло. Как изменятся вероятности гипотез H_1 и H_2?

Обозначим событием А отсутствие отказа.

$$P(H_1) = 0{,}4;$$

$$P(H_2) = 0{,}6;$$

$p_1 = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$ и

$p_2 = 0{,}7$ - соответствующие гипотезам условные вероятности.

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) = 0{,}4\cdot 0{,}95+0{,}6\cdot 0{,}7 = 0{,}38+0{,}42 = 0{,}8;$$

$P(H_1/A) = \dfrac{0{,}4\cdot 0{,}95}{0{,}8} = 0{,}475$ - апостериорная вероятность гипотезы H_1

$P(H_2/A) = \dfrac{0{,}6\cdot 0{,}7}{0{,}2} = 0{,}525$ - апостериорная вероятность гипотезы H_2 .

Решим задачу для случая, когда отказ произошел (событие $\overline{A}$).

$$P(\overline{A}) = P(H_1)\cdot P(\overline{A}/H_1) + P(H2)\cdot P(\overline{A}/H_2) = 0{,}4\cdot 0{,}05 + 0{,}6\cdot 0{,}3 = 0{,}02 + 0{,}18 = 0{,}2;$$

$P(H_1/\overline{A})\dfrac{0{,}4\cdot 0{,}05}{0{,}2} = 0{,}1$ - апостериорная вероятность гипотезы H_1

$P(H_2/\overline{A})\dfrac{0{,}6\cdot 0{,}05}{0{,}2} = 0{,}9$ - апостериорная вероятность гипотезы H_2 .

1.7.7 Независимые повторные испытания

Испытания называются независимыми , если исход каждого опыта (событие А произошло или не произошло) не зависит от того, какие исходы имели другие опыты.

Пусть вероятность появления события А в каждом из этих опытов одна и та же: $P(A) = p$ и $P(\overline{A}) = 1 - p = q$.

1.7.7.1 Формула Бернулли

Теорема: Вероятность появления события A ровно k-раз при количестве опытов n определяется количеством возможных комбинаций, при которых событие A происходит. Эта вероятность равна

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$ - формула Бернулли.

Доказательство:

Предварительно рассмотрим ситуации, возможные при количестве опытов n = 3 для k = 2

$$A_3(2) = AA\bar{A} + A\bar{A}A + \bar{A}AA,$$

и ситуации, возможные при количестве опытов n = 4 для k = 3:

$$A_4(3) = AAA\bar{A} + AA\bar{A}A + A\bar{A}AA + \bar{A}AAA.$$

Возможные исходы при любом n для k = 0,1,2,…,n можно найти из выражения:

$$(\bar{A} + A)_1 \cdot (\bar{A} + A)_2 \cdot (\bar{A} + A)_3 \cdots (\bar{A} + A)_n = U,$$

где индексы соответствуют порядковому номеру испытания. Согласно аксиоме сложения и частному случаю теоремы умножения для независимых событий можно прийти к выводу, что вероятности возможных комбинаций определяются выражением $(q + p)^n$, которое представляет собой бином Ньютона:

$$(q + p)^n = q^n + C_n^1 q^{n-1} p^1 + C_n^2 q^{n-2} p^2 + C_n^3 q^{n-3} p^3 + \ldots + p^n =$$

$$= \sum_0^n C_n^k q^{n-k} p^k.$$

***Пример:** Рассчитать вероятность поражения цели 0,1,2,3 раза при пуске трех ракет, если вероятность поражения одной ракетой p = 0,9.*

0 $P_3(0) = C_3^0 p^0 q^3 = 0{,}001$;

1 $P_3(1) = C_3^1 p^1 q^2 = 0{,}027$;

2 $P_3(2) = 3 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}243$;

3 $P_3(3) = 1 \cdot 0{,}9^3 \cdot 1 = 0{,}729$.

1.7.7.2 Локальная теорема Лапласа

Эта теорема применима для большого числа испытаний ($n > 20$), когда формула Бернулли требует большого количества вычислений.

Теорема Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность того, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз приближенно равна

(см. 2.5.2) $$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \text{где } 0 \neq p \neq 1; \ x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}; \ n > 20.$$

Это выражение может вывести, если использовать формулу Стирлинга, которая дает приближенное значения факториала для больших значений n:

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}$$

Функция $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ (см. 2.5.5) приводится в таблицах и может быть посчитана с помощью калькулятора.

Пример. Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 80 раз в 400-ах испытаниях, если вероятность появления A в каждом p=0.2.

$N = 400 \quad k = 80 \quad p = 0.2 \quad$ находим $x = 0 \quad \varphi(0) = 0{,}3989$

$P_{400}(80) = 0{,}0498$

1.7.7.3 Интегральная теорема Лапласа

В практике применения теории вероятности возникает задача, когда нужно определить вероятность появления события не менее k_1 и не более k_2 раз при условии , что количество испытаний n достаточно велико.

<u>Пример:</u> Вероятность того, что транзистор не прошел ОТК, равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 транзисторов не проверено от 70 до 100.

Теорема: Если вероятность события А равна p, и она одинакова в каждом испытании и отлична от 0 и 1, то вероятность события, которое заключается в том, что А происходит от k_1 до k_2 раз, приближенно равна

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

$$\text{где} \quad n > 20; \qquad 0 \neq p \neq 1; \quad a_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}; \qquad a_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Функция $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$, которая называется интегралом Лапласа (см. 2.5.5)

приводится в учебниках и справочниках по теории вероятностей;

$$P_n(k_1,k_2) = \Phi(a_2) - \Phi(a_1).$$

Вернемся к нашему примеру

$$p=0.2 \quad q=0.8 \quad n=400 \quad k_1 = 70 \quad k_2 =100 \qquad npq = 8^2$$

$$P_{400}(70,100) = \Phi(a_2) - \Phi(a_1) = \Phi(2.5) - \Phi(-1.25)$$

$$P_{400}(70,100) = 0.888$$