Лекция 6

План лекции

2.3.3 Дифференциальная функция распределения непрерывных случайных величин
2.4 Числовые характеристики случайных
2.4.1 Математическое ожидание и его свойства.
2.4.2 Дисперсия случайных величин и ее свойства

## 2.3.3 Дифференциальная функция распределения непрерывных случайных величин f(x) и ее свойства

Способ, когда закон распределения непрерывной случайной величины задают с помощью интегральной функции, не является единственным. Гораздо чаще его задают с помощью дифференциальной функции распределения вероятностей, которую обозначают f(x). Эту функцию также называют плотностью распределения вероятностей.

Дифференциальной функцией распределения называется 1-я производная от интегральной функции распределения

$$f(x) = F'(x).$$

Для дискретной случайной величины функция распределения будет иметь разрывы, и поэтому она не применяется для дискретных величин.

<u>Теорема:</u> Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение на интервале (a,b) равна определенному интегралу от дифференциальной функции, взятому в этих пределах

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

*Доказательство:* Будем исходить из известного: $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx = \int_{-\infty}^b F'(x)dx - \int_{-\infty}^a F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

Отсюда , если $f(x) = F'(x)$, то $F(x) = \int_{-\infty}^x f(z)\,dz$,

где z – переменная интегрирования.

## Свойства дифференциальной функции распределения

1. $f(x) \geq 0$, т.к. это производная от неубывающей функции.
2. $P(x \leq X \leq x + \Delta x) \approx f(x) \cdot \Delta x$, следует из доказательства теоремы,

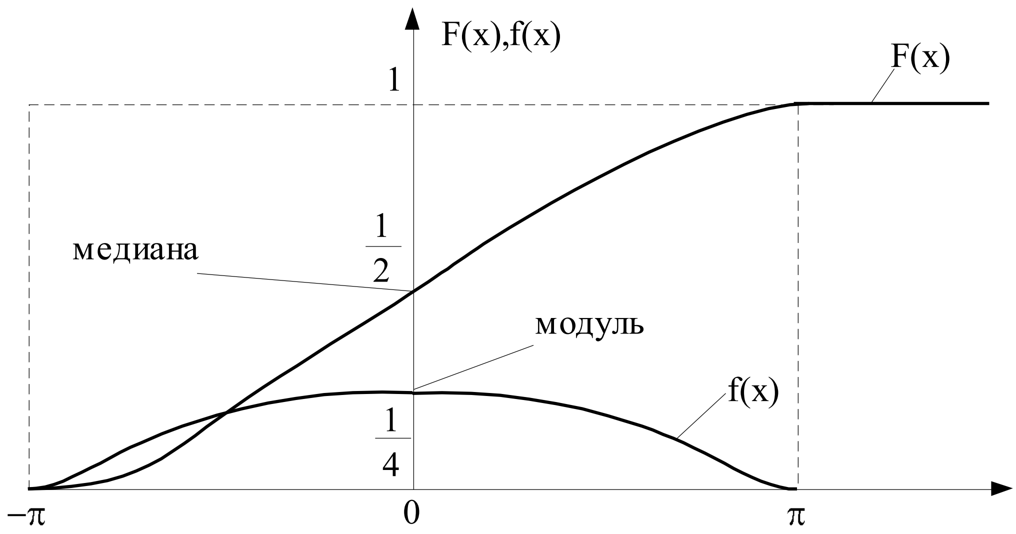
**f (x) dx** элемент вероятности.

3. $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

***Пример**: Найти выражение для дифференциальной функции f(x), если интегральная функция описывается выражением*

$$F(x) = \begin{cases} a\left(1 + \sin\frac{x}{2}\right); |x| < \pi \\ 0; \quad x < -\pi; \\ 1; \quad x > \pi \end{cases} \qquad a = \frac{1}{2}; \qquad f(x) = F'(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \sin\frac{x}{2}\right)'_x = \frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}.$$

Полученное выражение описывает функцию f(x) на интервале $(-\pi, \pi)$; вне этого интервала она равна 0 как производная от констант 0 и 1.




## 2.4 Числовые характеристики случайных величин

Рассмотренные интегральная и дифференциальная функции распределения однозначно и в полной мере определяют характер случайной величины. Однако не всегда есть возможность определить закон распределения вероятностей. Кроме того, часто этого и не требуется , так как используют числовые характеристики случайной величины, которые описывают случайную величину не в деталях, а суммарно . К числу таких характеристик случайной величины относятся:

1. $M_o$ - модуль ;
2. $M_e$ - медиана;
3. M[X] -математическое ожидание;
4. D[X] -дисперсия;

5.M[$X^k$] -момент k-го порядка;
6. E[X] -эксцесс;
7. S[X] - коэффициент асимметрии (асимметрия ).

Числовые характеристики случайных величин – это не случайные числа.

Модулем дискретной случайной величины называется то ее возможное значение, которое имеет наибольшую вероятность появления.

Для непрерывной случайной величины модуль соответствует значению, для которого функция $f(x)$ имеет максимальное значение

Медианой непрерывной случайной величины называется то ее значение, для которого интегральная функция принимает значение равное 0.5 . Это означает, что с равной вероятностью случайная величина может быть больше и меньше ее медианного значения.

### 2.4.1 Математическое ожидание и его свойства.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений возможных значений случайной величины на вероятности их появления

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i)$$

Математическое ожидание случайной величины – это такое число, вокруг которого колеблются (бывают больше или меньше) значения случайной величины в каждом из опытов. Используют и другие обозначения:

$$M(x) = M_x = m_x = m$$

Частный случай:

Если $p(x_i) = p = 1/n$, то математическое ожидание такой случайный величины равно его среднему арифметическому

Пример с игральной костью

$$M(X) = \frac{1}{6}\sum_{1}^{6} i = 3.5$$

$$M(X) = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i .$$

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx$$ - для непрерывной случайной величины.

**Свойства математического ожидания.**

1. $M(C)=C$.

***Математическое ожидание постоянной величины равно самой величине.***

2. $M(CX)=CM(X)$.

***Постоянный множитель можно выносить за скобки .***

3. $M(C+X)=M(X)+C$

***Математическое ожидание суммы случайной величины и постоянной равно сумме математического ожидания случайной величины и постоянной***

4. $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$.

***Для любых двух случайных величин математическое ожидание их суммы равно сумме их математических ожиданий***

4'. $M[\sum_{1}^{n} X_i]=\sum_{1}^{n} M[X_i]$

5. ***При условии, что*** $X, Y$ ***- независимые случайные величины***

$$M(XY)=M(X)\cdot M(Y)$$

***Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий***.

### 2.4.2 Дисперсия случайных величин и ее свойства

<u>Дисперсией</u> называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания

$$D(X)=M\left[(X-m)^2\right]=D_x$$

Дисперсия характеризует разброс случайной величины вокруг ее среднего значения и определяется выражениями:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^2 p(x_i)$$ - для дискретной случайной величины;

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2 f(x)\,dx$$ - для непрерывной случайной величины.

***Закон распределения случайной величины однозначно определяет все её числовые характеристики. Важнейшими являются математическое ожидание и дисперсия. Можно представить «анкету» случайной величины таким образом:***

| ***Ф*** | ***И*** | ***О*** |
|---|---|---|
| ***Закон распределения.*** | ***Мат. ожидание.*** | ***Дисперсия.*** |

За меру разброса случайной величины принято брать величину

$\sqrt{D_x}$ - среднеквадратичное отклонение (СКО);

$$\textbf{СКО} = \sigma_x = \sigma(X).$$

Используют также нормированное СКО $\sigma_x / m_x = \sigma_{ox}; \quad \sigma / m = \sigma_o$.

## Свойства дисперсии

1) $D(C) = 0$ ***Дисперсия постоянной величины равна 0***

2) $D(CX) = C^2 D(X)$ ***Постоянный множитель выносится за знак дисперсии с возведением в квадрат.***

3) $D(C + X) = D(X)$ ***Дисперсия не изменяется, если к случайной величине прибавить или отнять случайное число.***

4) ***Если*** $X, Y$ ***- независимые случайные величины, то дисперсия суммы равна сумме дисперсий. Дисперсия разности так же равна сумме дисперсий.***

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y);$$

$$D(X + \alpha Y) = D(X) + \alpha^2 D(Y);$$

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

5) $D(XY) = D(X) \cdot D(Y)$ при $m_x = m_y = 0$. ***Дисперсия произведения независимых случайных величин с нулевым математическим ожиданием равна произведению дисперсий.***

## Полезное соотношение:

$$D(X) = M(X^2) - m_x^2.$$

Дисперсия случайной величины равна математическому ожиданию квадрата этой величины за вычетом квадрата математического ожидания.

*Доказательство:*

$$D(X) = M\left[(X - m_x)^2\right] = M(X^2 - 2m_x \cdot X + m_x^2) = M(X^2) - 2m_x \cdot m_x + m_x^2 = M(X^2) - m_x^2.$$

## *Приложение к лекции*

**-Проведем доказательство свойства** $M[X+Y]=M[X]+M[Y]$ **на примере дискретных случайных величин. В этом случае конкретные значения , которые может принимать случайная величина** Z=X+Y **определяются выражением** $z_{ij}=(x_i+y_j)$, i = 1, 2, …, n; j = 1, 2, …, m

$$\mathbf{M[X+Y]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i+y_j)\cdot p(x_i,y_j)=}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{m}\mathbf{x_i\cdot p(x_i,y_j)}\right\}+\sum_{j=1}^{m}\left\{\mathbf{y_j\sum_{i}^{n}p(x_i,y_j)}\right\}=$$

**Положим, что появление значения** $y_j$ **это событие** A **и применим к этому событию формулу полной вероятности :**

$$\mathbf{P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A/H_i)}\,. \qquad *)$$

**Событие** A **может появиться с одним из событий гипотез и отметим, что согласно теореме умножения, которая была использована при выводе формулы** *)

$$P(H_i)\cdot P(A/H_i)=P(A\cdot H_i)$$

**События-гипотезы состоят в появлении значений** $x_1, x_2, \ldots, x_n$. **Тогда**

$$\mathbf{P(A)=p(y_j)=\sum_{i=1}^{n}p(x_i)\cdot p(y_j/x_i)=\sum_{i=1}^{n}p(y_j,x_i)}\,.$$

**Следовательно, сумма в фигурных скобках второго слагаемого должна равняться вероятности появления** $y_j$ - $p(y_j)$. Тогда можно написать:

$$=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x_i p(x_i)}+\sum_{j=1}^{m}\mathbf{y_j p(y_j)}=\mathbf{M[X]+M[Y]}$$

**Доказательства других свойств матожидания**

$$\mathbf{M[CX]=\sum_{1}^{n}(Cx_i)p(C,x_i)}=\sum_{1}^{n}(Cx_i)\cdot 1\cdot p(x_i)=C\sum_{1}^{n}x_i p(x_i)$$

$$\mathbf{M[C+X]=\sum_{1}^{n}(C+x_i)p(C,x_i)=\sum_{1}^{n}(C+x_i)p(x_i)=\sum_{1}^{n}Cp(x_i)+\sum_{1}^{n}x_i p(x_i)}$$

**Доказательства свойства дисперсии** $D[X+Y]=D[X]+D[Y]$

$D[X+Y]=M[(X+Y-m_{x+y})^2]=M[(X-m_x+Y-m_y)^2]=\mathbf{D[X]+D[Y]}+\underline{2M[X-m_x]\cdot M[Y-m_y]}$