Лекция 8

План лекции

2.5.3 Закон Пуассона
2.5.4 Показательный закон распределения
2.5.5 Нормальный (гауссов) закон распределения вероятностей

2.5.3 **Закон Пуассона** (закон редких явлений)

Дискретная случайная величина $X(\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2}\ldots)$ распределена по закону Пуассона, если вероятность того ,что она примет определенное целочисленное значение k выражается формулой

$$p(x_i) = p(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}, \qquad x_i = k = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2},\ldots \qquad \boldsymbol{\lambda} = np\,,\ n \to \infty$$

Теорема: Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, распределённой по закону Пуассона с параметром λ,связаны соотношением $m_x = D_x = \boldsymbol{\lambda}$.

Доказательство. Исходим из того, что распределение Пуассона является предельным случаем биноминального распределения для $n \to \infty$:

$$\mathbf{M}(X) = np = \boldsymbol{\lambda};$$

$$D_x = npq = \lambda\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) = \lambda, \ \text{т.к.}\ \ q = 1 - p = 1 - \frac{\lambda}{n} \approx 1.$$

Практикой доказано, что распределение Пуассона хорошо описывает простейшие потоки событий.

Потоком событий называется последовательность событий, которые происходят в случайные моменты времени.

.

Для простейших потоков характерны три свойства:
стационарность, отсутствие последействия и ординарность.

Стационарность означает, что вероятность появления k событий зависит только значения k и длительности интервала наблюдений и не зависит от текущего времени.

Отсутствие последействия означает, что вероятность появления события не определяется тем, сколько их произошло в предыдущий период.

Ординарность означает пренебрежимо малую вероятность появления двух и более событий в очень короткие промежутки времени.

Для простейших потоков событий закон Пуассона принимает вид:

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

где λ - интенсивность событий, т.е. количество событий, происходящих в единицу времени; t - интервал наблюдения.

Пример: Радиолокационная станция ОКП регистрирует цели со средней плотностью $\lambda = 2$ объекта в минуту. Считая , что на любом отрезке времени число наблюдаемых объектов распределено по закону Пуассона; найти:
а) вероятность регистрации за две минуты ровно трех объектов;
б) вероятность регистрации за две минуты хотя бы одного объекта;
в) вероятность регистрации за две минуты не менее трех объектов.

а) Вероятность регистрации за две минуты ровно трех объектов

$$P_2(3) = \frac{(2 \cdot 2)^3 \cdot e^{-4}}{6} =$$

б) Вероятность регистрации за две минуты хотя бы одного объекта

$$P_б = 1 - P_2(0) = 1 - \frac{e^{-4}}{1}$$

в) Вероятность регистрации за две минуты не менее трех объектов

$$P_в = 1 - P_2(0) - P_2(1) - P_2(3)$$

2.5.4 Показательный закон распределения

Показательное распределение широко применяется в теории надежности .

Случайная величина распределена по показательному закону, если

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0 & , x < 0. \end{cases}$$

Найдем интегральную функцию

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x')\,dx' = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda x'} (dx') = -e^{-\lambda x'} \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x} .$$

Ниже представлены графики этих функций. Если в качестве переменной используется время, то $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, где $R(t) = e^{-\lambda t}$ - показательный закон надежности и λ –интенсивность отказов.

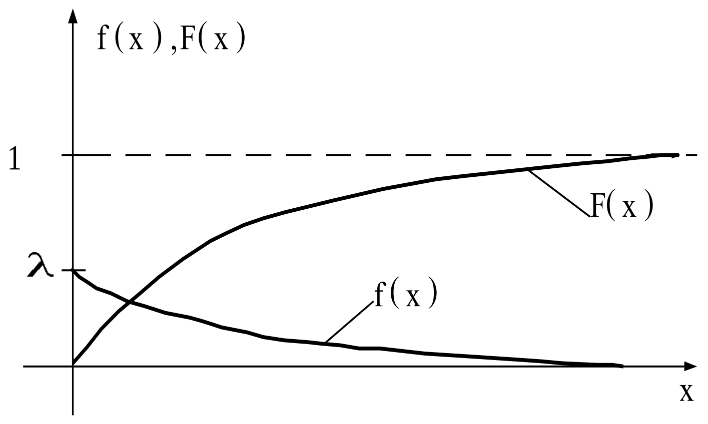
На практике отмечено, что при заданной интенсивности отказов λ вероятность безотказной работы элемента электронной техники на интервале времени t не зависит от времени предшествующей работы до начала рассматриваемого интервала, а зависит только от длительности интервала t .

<u>Теорема:</u> Математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение случайной величины, распределенной по показательному закону с параметром λ, равны:

$$m_x = \sigma_x = \frac{1}{\lambda}.$$

Доказательство:

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = x\left(-e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^{\infty} - \frac{\lambda}{\lambda}\int_0^{\infty}\left(-e^{-\lambda x}\right) dx = \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda};$$



$$D_x = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x}dx - \frac{1}{\lambda^2} = -\frac{1}{\lambda^2} + x^2\left(-e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^\infty - 2\int_0^\infty x\left(-e^{-\lambda x}\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda^2} + 2\int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda} x e^{-\lambda x}dx = -\frac{1}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

2.5.5 Нормальный закон распределения

Это основной закон теории вероятностей. Доказано, что в пределе все законы стремятся к нормальным законам распределения. По крайней мере, сумма бесконечного числа случайных величин, распределенных по любым законам, в итоге приобретает нормальный закон распределения.

Случайная величина распределена по нормальному закону распределения, если

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}; \qquad -\infty < x < \infty.$$

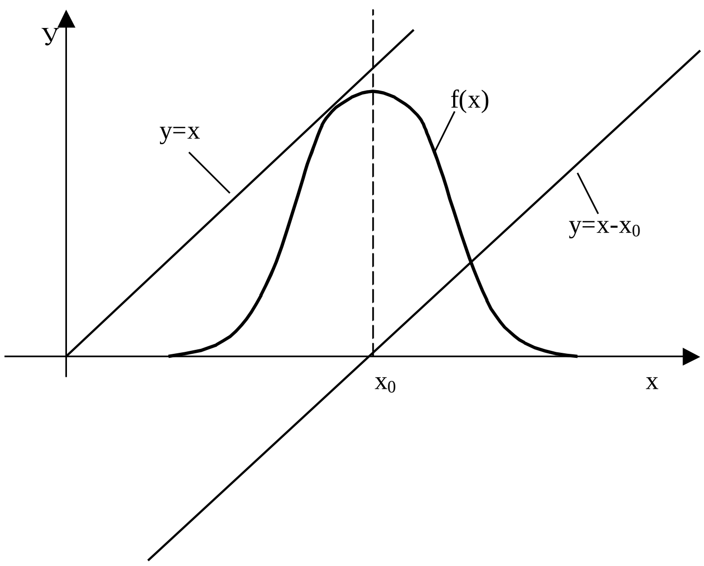
Нормальное распределение является распределением, симметричным относительно значения $x_0=m$ и можно отметить общее свойство таких распределений.

Если случайная величина распределена симметрично относительно x_o, то математическое ожидание такой случайной величины равно x_o.

Действительно,

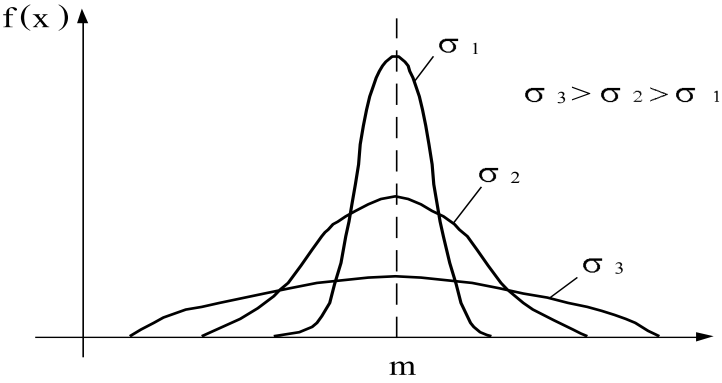
$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_o + x_o) f(x)dx = x_o + \int_{-\infty}^{x_o} (x - x_o) f(x)dx + \int_{x_o}^{\infty} (x - x_o) f(x)dx$$

Так как функция f(x) относительно x_o, то оба интеграла отличаются только знаками. Тогда $m_x = x_0$.



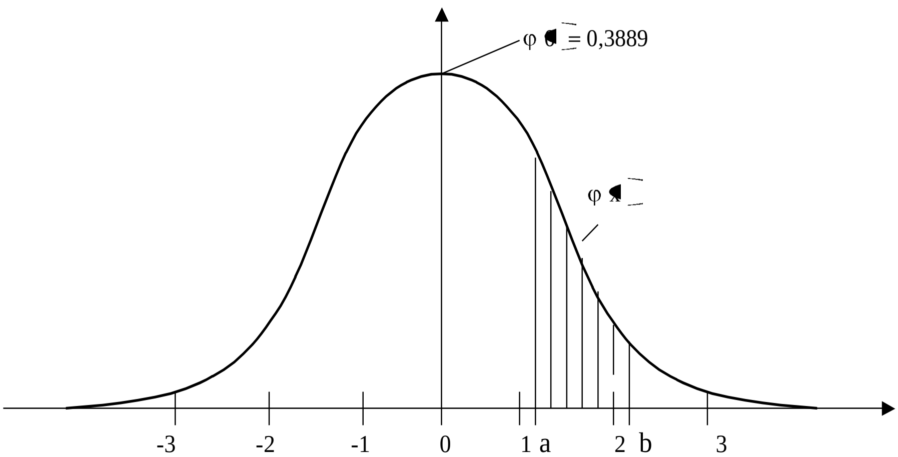
Дисперсия $D_x = \sigma^2$.

Дисперсия определяет форму кривой нормального закона распределения.



Чаще всего используют нормальный закон в нормированной форме , который получают заменой переменной $x \to \dfrac{x-m}{\sigma}$.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} .$$



$$F(x) = \Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{z^2}{2}} dz = 0{,}5 + \Phi(x); \text{ для } x \geq 0$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz ;$$

$$P(a \leq x \leq b) = \Phi^*(b) - \Phi^*(a).$$

Правило «трёх сигм»

В таблице приведены результаты интегрирования на интервале (a,b)

a	b	$\varphi(b)$	$P(a \le x \le b)$
-0,5	0,5	0,352	0,3830
-1	1	0,242	0,6826
-2	2	0,054	0,0544
-3	3	0,004	0,9974

Правило «трёх сигм» гласит: абсолютная величина отклонения нормальной величины от её математического ожидания с практической достоверностью не превосходит утроенного среднеквадратичного отклонения.

Это значит, что для нормального распределения величины все возможные значения практически заключены в интервале **6σ** с центром в точке математического ожидания.