Лекция 11

План лекции

3.6 Числовые характеристики системы двух случайных величин
3.7 Коррелированность и зависимость случайных величин
3.7.1 Корреляционные матрицы
3.8 Характеристики многомерных систем
3.9 Двумерный нормальный закон распределения
4. Закон больших чисел

Для описания двумерной системы случайных величин кроме математического ожидания и дисперсии его составляющих используют характеристики связи между этими составляющими. К их числу относятся корреляционный момент и коэффициент корреляции.

Термин корреляция выражает статистическую зависимость между случайными величинами. Это означает, что связаны не отдельные, конкретные значения случайных величин, а связаны их усредненные характеристики.

Корреляционным моментом μ_{xy} случайных величин X и Y называют математическое ожидание произведения отклонения этих величин от их математических ожиданий:

$$\mu_{xy} = M[(X - m_x)(Y - m_y)]$$

Для вычислений корреляционного момента используют формулы: для дискретных :

$$\mu_{xy} = K_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - m_x)(y_j - m_y)P(x_i, y_j),$$

если X, Y - непрерывные, то:

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)(y - m_y)f(x, y)\,dx\,dy$$

По корреляционному моменту можно установить существует ли зависимость между компонентами системы X и Y.

Теорема Корреляционный момент двух независимых случайных величин X и Y равен нулю

Доказательство

Исходя из свойств математического ожидания, а именно - математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей -

$$M\left[(X-m_x)(Y-m_y)\right]=M\left(X-m_x\right)\cdot M\left(Y-m_y\right)=0\cdot 0$$

Коэффициентом корреляции r_{xy} случайных величин X и Y называют отношение корреляционного момента к произведению среднеквадратичных отклонений величин:

$$r_{xy}=\frac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}\text{ - коэффициент корреляции;}\qquad r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}\le 1.$$

Очевидно, что

$$k_{xy}=k_{yx}\quad,\qquad r_{xy}=r_{yx}\,.$$

3.7 Коррелированность и зависимость случайных величин

Две величины называются коррелированными, если их корреляционный момент не равен нулю.

$$K_{xy}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)(y-m_y)\,f(x,y)\,dx\,dy\neq 0$$

Две коррелированные случайные величины являются также и зависимыми.

$$f(x,y)\neq f_1(x)\,f_2(y)$$

Действительно, если исходить от обратного , то дифференциальная функция такой системы

$$f(x,y) = f_2(y)\cdot f_1(x)\ ,$$

но тогда корреляционный момент K_{xy} равен произведению интегралов по составляющими, каждый из них тождественно равен нулю.

Обратное утверждение - две некоррелированные величины независимы - не всегда имеет место.

Две зависимые величины могут быть как коррелированными , так и не коррелированными.

Действительно, из условия

$$f(x,y)\neq f_1(x)\,f_2(y)$$

еще не следует, что значение двойного интеграла будет равным нулю, и все зависит от вида дифференциальной функции системы $f(x, y)$. Достаточно показать это на конкретных примерах.

Пример : Двумерная система задана дифференциальной функцией

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \le 1; \\ 0, & x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy = \frac{1}{\pi} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi};$$

$$f_2(y) = \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi};$$

$$m_x = m_y = 0.$$

$f_1(x) \cdot f_2(y) \ne \frac{1}{\pi}$ - это зависимые случайные величины. И в то же время

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y)\,dx\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x \cdot y\,dx\,dy = \frac{1}{\pi} \cdot 0 \cdot 0 = 0.$$

3.7.1 Корреляционные матрицы

Числовые характеристики двумерной системы могут быть записаны в виде матриц

Корреляционная матрица

$$K = \begin{bmatrix} D_x & K_{xy} \\ K_{xy} & D_y \end{bmatrix};$$

Нормированная корреляционная матрица

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{xy} \\ r_{yx} & 1 \end{bmatrix}.$$

3.8. Характеристики многомерных систем

Вся теория двумерных случайных систем может быть распространена на многомерную систему (многомерный случайный вектор) с произвольным числом составляющих.

1. $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ - n-мерный случайный вектор.
2. $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$-дифференциальная функция n-мерной случайной величины.

   $f(x_1, x_2, \dots, x_n)\,dx_1, dx_2, dx_n$ - элемент вероятности.

3. $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - интегральная функция n-мерной случайной величины.

   $P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n)$.

4. Матрица-строка математического ожидания или центр рассеяния:

$$(M_{x1}, M_{x2}, ..., M_{xn}).$$

5. Корреляционные моменты

$$K = \begin{bmatrix} D_{x1} & K_{12} & K_{13} & \vdots & K_{1n} \\ K_{21} & D_{x2} & K_{23} & \vdots & K_{2n} \\ K_{31} & K_{32} & D_{x3} & \vdots & K_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ & & & \vdots & D_{xn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{x1} & K_{12} & K_{13} & \cdots & K_{1n} \\ & D_{x2} & K_{23} & & \\ & & D_{x3} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & D_{xn} \end{bmatrix}$$ так как $к_{ij}=kji$

Для случаев, когда все случайные величины независимы, корреляционная матрица становится диагональной.

$$K = \begin{bmatrix} D_{x1} & & & \\ & D_{x2} & & \\ & & D_{x3} & \\ & & & \\ & & & D_{xn} \end{bmatrix} = \mathrm{diag}\,(D_{x1}, D_{x2}, ..., D_{xn}).$$

3.9. Двумерный нормальный закон распределения

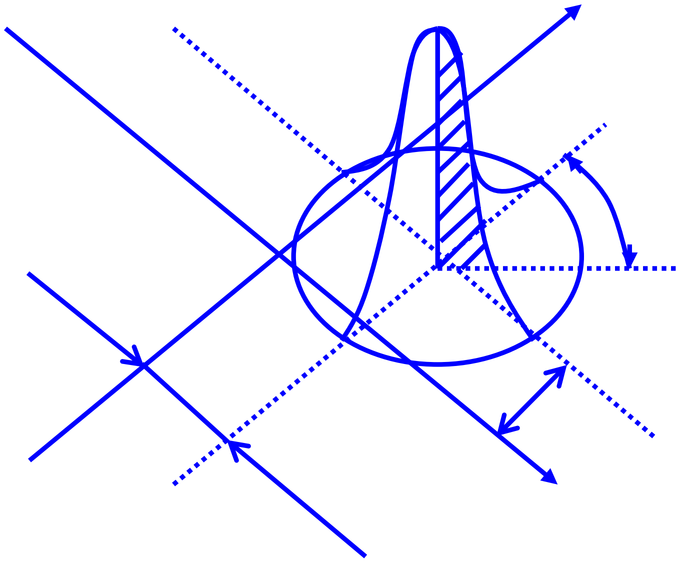
Характеризуется следующей дифференциальной функцией:

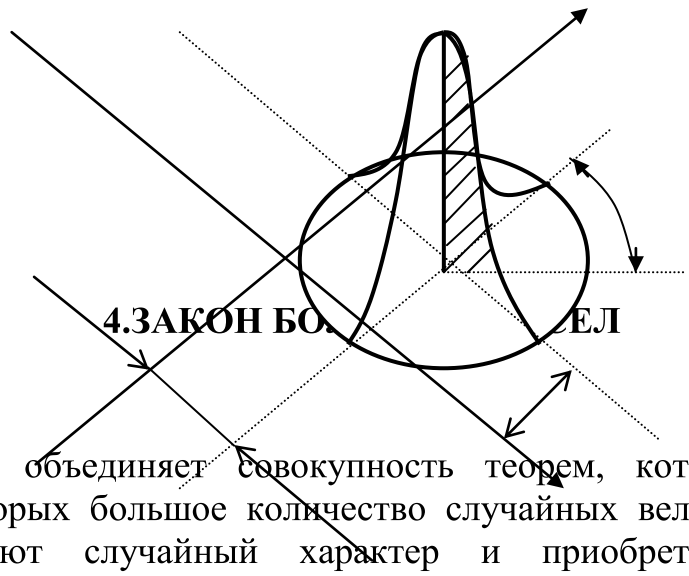
$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} - 2r_{xy}\frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right]\right\}$$

X и Y – нормально распределенные случайные величины с коэффициентом корреляции $r = r_{xy}$; $\sigma^2{}_x$, $\sigma^2{}_y$ - дисперсии составляющих ; m_x , m_y - их математические ожидания . Если коэффициент корреляции равен нулю, то X и Y- независимые случайные величины и тогда

$$f(x, y)\Big|_{r_{xy}=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x\sqrt{2\pi}\sigma_y}\exp\left\{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right\}$$

Для системы с зависимыми составляющими эллипса (см. рис. ниже) поворачивается на угол, зависящий от r_{xy}.





4.ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Этот закон объединяет совокупность теорем, которые формулируют условия, при которых большое количество случайных величин (например, их сумма) утрачивают случайный характер и приобретают определённую закономерность. На практике отмечено, что конкретные особенности каждого отдельного явления не сказываются на усредненном результате массы таких явлений.

Случайные отклонения от среднего, неизбежные в каждом отдельном случае, в массе явлений взаимно погашаются.

Свойство устойчивости массовых явлений, отмеченное на практике, стало предметом теоретических исследований. Результатом исследований стало доказательство ряда теорем. К их числу относятся теорема и неравенство Чебышева, теорема Бернулли.