

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

**ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН  
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ  
РАЗДЕЛА КУРСОВОГО ПРОЕКТА  
«КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ  
ПЛОСКИХ ШАРНИРНО-РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ  
ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ»  
ДЛЯ СТУДЕНТОВ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ**

УТВЕРЖДЕНО  
редакционно-издательским  
советом университета,  
протокол № 3 от 8.12.06 г.

Харьков НТУ «ХПИ» 2007

**Теория механизмов и машин.** Методические указания к выполнению раздела курсового проекта «Кинематическое исследование плоских шарнирно-рычажных механизмов графоаналитическим методом» для студентов машиностроительных специальностей/ Сост. Н. А. Ткачук, В. Б. Зеленский, Е. И. Зинченко и др. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2007. – 24 с. – Рус. яз.

Составители: Н. А. Ткачук  
В. Б. Зеленский  
Е. И. Зинченко  
Г. Д. Гриценко

Рецензент А. В. Устиненко

Кафедра теории и систем автоматизированного проектирования механизмов и машин

## Вступление

Большинство плоских шарнирно-рычажных механизмов, применяемых в технике, состояются из нескольких двухзвенных структурных групп (групп Ассур) второго класса. Кинематическое исследование механизма необходимо для определения габаритов механизма при проектировании его конструкции, для учета действующих на звенья сил инерции при проведении силового расчета механизма, для динамического анализа механизма в составе машины.

Методические указания включают в себя: задачи кинематического исследования; объем исходных данных для проведения его проведения; применяемые методы, этапы и последовательность кинематического исследования плоских шарнирно-рычажных механизмов второго класса. Приведены теоремы теоретической механики, на основании которых составляются векторные уравнения для определения скоростей и ускорений в точке внутренней кинематической пары структурной группы второго класса.

Подробно рассмотрен графоаналитический метод кинематического исследования плоских рычажных механизмов, в том числе системы векторных уравнений для скоростей и ускорений для каждого из пяти видов структурных групп второго класса.

Рассмотрен пример кинематического исследования плоского рычажного механизма. Представленный список литературы позволяет изучать данный вопрос в необходимом объеме.

### **1. Задачи кинематического исследования. Исходные данные**

Кинематическое исследование производится с целью определения:

- положений звеньев (координат осей шарниров и отдельных точек звеньев);
- линейных скоростей отдельных точек звеньев и угловых скоростей

звеньев;

- линейных ускорений отдельных точек звеньев и угловых ускорений звеньев.

Исходными данными для кинематического исследования являются постоянные геометрические параметры, определяющие кинематическую схему механизма. К ним относятся: длины звеньев, координаты неподвижных точек и параметры, определяющие положение неподвижных направляющих.

Кроме того, должен быть задан закон движения начального звена – кривошипа, то есть угол поворота  $\varphi$ , угловая скорость  $\omega$  и угловое ускорение  $\varepsilon$ . Для большинства механизмов кинематическое исследование производится при постоянной угловой скорости  $\omega = \text{const}$  для ряда положений механизма при изменении угла поворота  $\varphi$  кривошипа в пределах одного оборота.

## **2. Методы кинематического исследования**

В настоящее время применяются графоаналитический и аналитический методы кинематического исследования плоских рычажных механизмов второго класса.

При графоаналитическом методе – методе планов – графические построения планов механизма, планов скоростей и ускорений сопровождаются вспомогательными аналитическими вычислениями.

Сущность аналитического метода заключается в том, что координаты, скорости и ускорения осей шарниров, углы поворота, угловые скорости и ускорения звеньев механизма определяются в виде аналитических выражений, которые содержат конечное число алгебраических и тригонометрических операций.

## **3. Этапы кинематического исследования**

Кинематическое исследование плоских рычажных механизмов второго класса начинается с начального звена и затем выполняется при последовательном рассмотрении входящих в механизм структурных групп звеньев (групп Ассур) в порядке их присоединения при образовании механизма.

Исследование каждой группы состоит из ряда последовательных этапов.

На подготовительном этапе определяют координаты, скорости и ускорения точек присоединения звеньев группы.

Первый этап состоит в определении положения внутренней кинематической пары группы и углов поворота звеньев группы.

Второй этап – определение скоростей отдельных точек звеньев и угловых скоростей звеньев.

Третий этап – то же для ускорений.

При графоаналитическом методе кинематического исследования положения всех кинематических пар механизма в неподвижной системе координат и углы поворота звеньев определяются в результате измерений после построения кинематической схемы механизма в принятом масштабе. Аналитическое определение положения внутренней кинематической пары структурной группы и углов поворота ее звеньев определяется преимущественно методом замкнутых векторных контуров.

#### 4. Векторные уравнения для определения скоростей и ускорений

Независимо от того, каким методом производится кинематическое исследование – графоаналитическим или аналитическим, для каждого звена следует записать векторные уравнения, основанные на известных из теоретической механики теоремах, а именно: на теореме о распределении скоростей (ускорений) при плоском движении твердого тела или на теореме о сложении скоростей (ускорений) при относительном движении двух тел.

Первая теорема позволяет соотнести скорости (ускорения) двух точек на одном и том же звене (которое не является ползуном). Вторая устанавливает соотношение между скоростями (ускорениями) двух соответственных (смежных) точек на ползуне и направляющей.

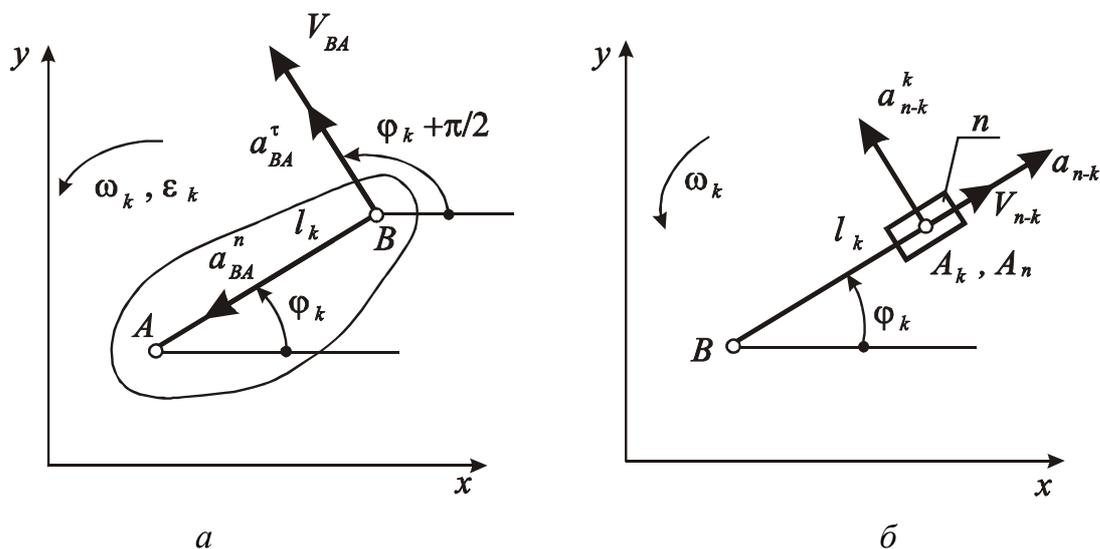


Рисунок 1

Рассмотрим точки \$A\$ и \$B\$ на звене \$k\$, которое не является ползуном (рис. 1, а), и примем точку \$A\$ за полюс. Тогда в соответствии с первой теоремой для скоростей \$\vec{V}\_A\$ и \$\vec{V}\_B\$ точек \$A\$ и \$B\$ звена имеем:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, \quad (4.1)$$

где  $\vec{V}_{BA}$  – скорость точки  $B$  во вращательном движении относительно точки  $A$ . При этом

$$\vec{V}_{BA} \perp BA \text{ и } V_{BA} = l_{BA} \omega_k, \quad (4.2)$$

где  $l_{BA}$  – расстояние между точками  $B$  и  $A$ , а  $\omega_k$  – угловая скорость звена. В случае отрицательного направления угловой скорости  $\omega_k$  направление вектора  $\vec{V}_{BA}$  будет противоположным указанному на рис. 1.

Для ускорений в этом случае получаем следующее векторное уравнение:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau, \quad (4.3)$$

где  $\vec{a}_A$  и  $\vec{a}_B$  – ускорения точек  $A$  и  $B$ ,  $\vec{a}_{BA}^n$  и  $\vec{a}_{BA}^\tau$  – нормальная и тангенциальная составляющие ускорения (или просто нормальное и тангенциальное ускорения) точки  $B$  во вращательном движении относительно точки  $A$ .

Нормальное ускорение  $\vec{a}_{BA}^n$  направлено от  $B$  к  $A$  по линии  $BA$ :

$$\vec{a}_{BA}^n \parallel BA;$$

тангенциальное ускорение  $\vec{a}_{BA}^\tau$  направлено перпендикулярно нормальному, ( $\vec{a}_{BA}^\tau \perp BA$ ). В случае отрицательного направления углового ускорения  $\varepsilon_k$  направление вектора  $\vec{a}_{BA}^\tau$  будет противоположным указанному на рис. 1, а. Таким образом, зная направление тангенциального ускорения в точке  $B$ , можно определить и направление углового ускорения  $\varepsilon_k$  звена  $k$  во вращательном движении относительно точки  $A$ .

Величина нормального ускорения  $\vec{a}_{BA}^n$  определяется по формуле:

$$a_{BA}^n = l_{BA} \omega_k^2. \quad (4.4)$$

Величина углового ускорения  $\varepsilon_k$  связана с величиной тангенциального ускорения  $\vec{a}_{BA}^\tau$  формулой

$$\varepsilon_k = \vec{a}_{BA}^\tau / l_{BA}. \quad (4.5)$$

Если звенья  $k$  и  $n$  образуют поступательную пару (рис. 1, б), то скорости двух совпадающих точек  $A_n$  и  $A_k$  на ползуне  $n$  и направляющей  $k$  связаны уравнением:

$$\vec{V}_{A_n} = \vec{V}_{A_k} + \vec{V}_{n-k}, \quad (4.6)$$

где  $\vec{V}_{A_n}$  – абсолютная скорость точки  $A_n$  на звене  $n$ ,  $\vec{V}_{A_k}$  – переносная скорость точки  $A_k$  на звене  $k$ ,  $\vec{V}_{n-k}$  – относительная скорость движения звена ползуна  $n$  по направляющей  $k$ .

Очевидно, за абсолютную скорость можно принять скорость звена  $k$  и уравнение (4.6) переписать, поменяв местами индексы  $n$  и  $k$ , то есть

$$\vec{V}_{A_k} = \vec{V}_{A_n} + \vec{V}_{k-n}. \quad (4.7)$$

На основании теоремы сложения ускорений имеем:

$$\vec{a}_{A_n} = \vec{a}_{A_k} + \vec{a}_{n-k}^k + \vec{a}_{n-k}, \quad (4.8)$$

где  $\vec{a}_{A_n}$ ,  $\vec{a}_{A_k}$  – ускорения точек  $A_n$  и  $A_k$ , являющиеся абсолютным и переносным ускорениями;  $\vec{a}_{n-k}$  – относительное ускорение звена  $n$  относительно звена  $k$ , направленное вдоль линии  $AB$ ;  $\vec{a}_{n-k}^k$  – кориолисово ускорение. Величина кориолисова ускорения

$$\vec{a}_{n-k}^k = 2\omega_k V_{n-k}. \quad (4.9)$$

По правилу Жуковского, чтобы определить направление вектора кориолисова ускорения в плоских механизмах, следует повернуть вектор относительной скорости  $\vec{V}_{n-k}$  на  $90^\circ$  по направлению переносного вращения.

Как и в случае уравнения (4.6) для скоростей уравнение для ускорений (4.8) можно переписать, поменяв местами, индексы  $n$  и  $k$ .

## 5. Графоаналитический метод кинематического исследования

5.1. Графоаналитический метод кинематического исследования состоит в построении планов механизма, планов скоростей и планов ускорений.

*План механизма* – это графическое изображение взаимного расположения звеньев, соответствующее заданному значению обобщенной координаты механизма (то есть заданному положению начального звена механизма).

*Планом скоростей* называется чертеж, на котором изображены векторы, равные по модулю и по направлению скоростям различных точек звеньев механизма для заданного положения начального звена. Эти векторы имеют начало в общей точке – полюсе плана скоростей. Полюс плана скоростей обозначается буквой  $p$ . Конец каждого вектора с началом в полюсе  $p$  снабжается малой буквой, соответствующей заглавному буквенному обозначению точки на плане механизма, скорость которой изображена этим вектором.

Для *плана ускорений* может быть сделано аналогичное определение.

Полнос плана ускорений обозначают буквой  $\pi$ .

Графические построения планов механизма, скоростей и ускорений производится при заранее выбранных масштабных коэффициентах. *Масштабным коэффициентом* физической величины называют отношение численного значения этой величины в свойственных ей единицах к длине отрезка в миллиметрах, изображающего эту величину.

Масштабный коэффициент обозначается буквой  $\mu$  с индексом, соответствующим обозначению физической величины. Так, масштабный коэффициент длин для плана механизма есть отношение какой-либо длины в метрах к отрезку, изображающему эту длину на чертеже в миллиметрах. Например,  $\mu_l = l_{AO} / AO$ . Размерность масштабного коэффициента длин есть м/мм.

Масштабные коэффициенты скорости и ускорения имеют размерности  $[\mu_v] = \text{м/с} \cdot \text{мм}$ ,  $[\mu_a] = \text{м/с}^2 \cdot \text{мм}$  соответственно.

5.2. Построение плана скоростей (ускорений) для структурной группы второго класса представляется возможным, если известны скорости (ускорения) точек присоединения звеньев группы к механизму (то есть точек внешних кинематических пар группы). Для этого следует записать систему векторных уравнений, определяющих скорость (ускорение) в точке внутренней кинематической пары группы. Эти векторные уравнения основаны на теоремах, указанных в разд. 4. Построение плана скоростей (ускорений) группы заключается в графическом решении системы указанных векторных уравнений.

Рассмотрим отдельные виды структурных групп второго класса.

5.2.1. Пусть для группы с тремя вращательными парами  $A$ ,  $B$  и  $C$  (рис. 2, а) известны скорости в точках  $A$  и  $C$  (рис. 2, б).

Уравнения для скорости в точке  $B$ , записанное для звеньев 2 и 3 дают систему

$$\begin{cases} \underline{\underline{\vec{V}_B}} = \underline{\underline{\vec{V}_A}} + \frac{\vec{V}_{BA}}{\perp BA}; \\ \underline{\underline{\vec{V}_B}} = \underline{\underline{\vec{V}_C}} + \frac{\vec{V}_{BC}}{\perp BC}. \end{cases} \quad (5.1)$$

Здесь и далее вектор, известный по величине и направлению, подчеркнут двумя линиями, а вектор, известный только по направлению, подчеркнут одной линией, под которой написано это направление.

Поскольку левые части уравнений системы (5.1) одинаковы, то одинаковы и правые, то есть

$$\frac{\vec{V}_A}{\perp BA} = \frac{\vec{V}_C}{\perp BC}. \quad (5.2)$$

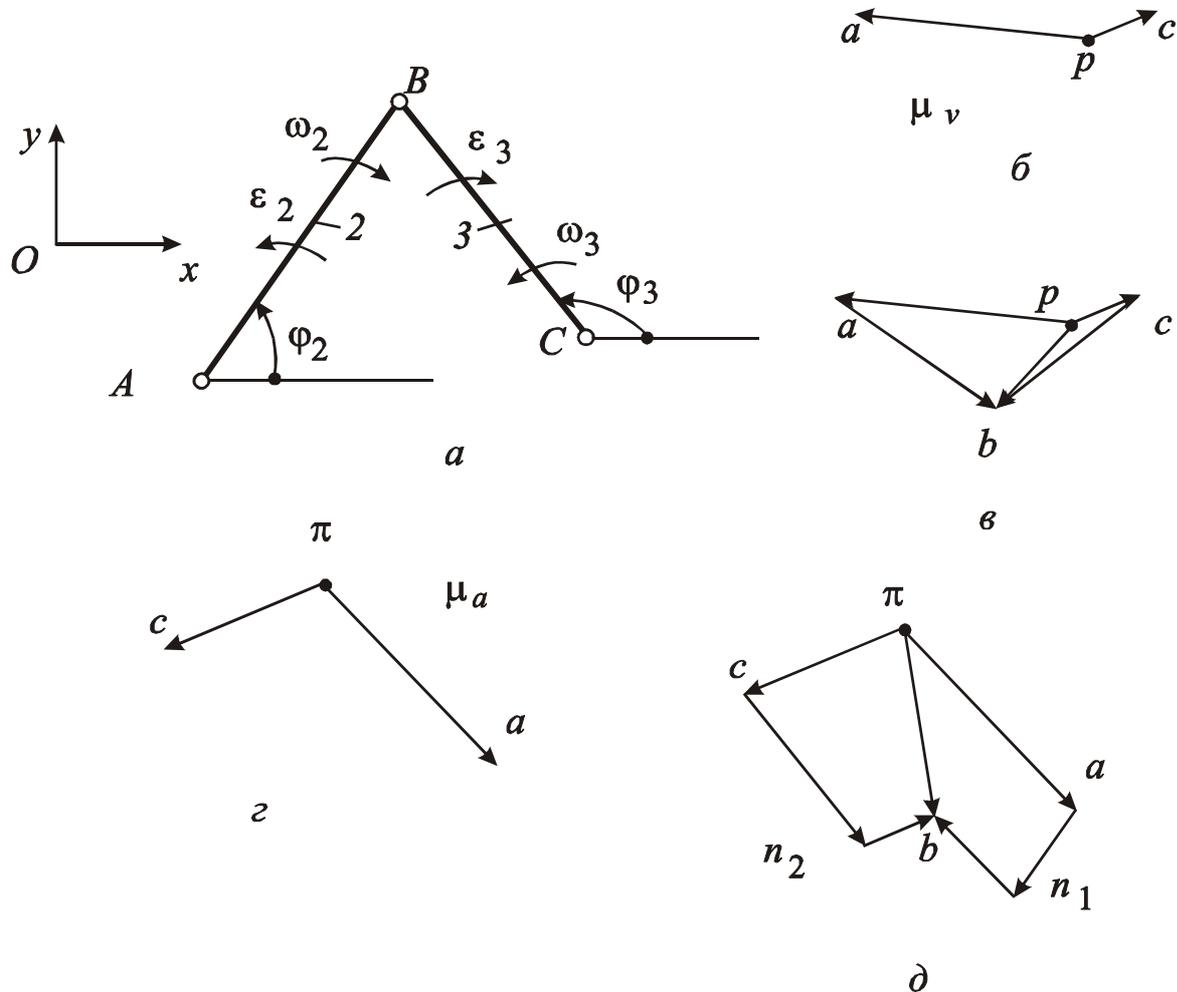


Рисунок 2

Векторное уравнение (5.2) равносильно двум скалярным уравнениям. Следовательно, из этого уравнения можно найти две неизвестные величины  $V_{BA}$  и  $V_{BC}$ . Эти неизвестные находятся графическим построением, представляющим равенство суммы двух векторов левой части уравнения сумме двух векторов правой части. Для этого из точки  $a$  проводим линию, перпендикулярную  $BA$ , а из точки  $c$  – линию, перпендикулярную  $BC$ . В пересечении этих направлений находится точка  $b$  – конец вектора искомой скорости точки  $B$ . Соединив точку  $b$  с полюсом  $p$ , получим вектор, изображающий скорость  $\vec{V}_B$  (рис. 2, в).

После построения плана скоростей группы следует определить угловые скорости  $\omega_2$  и  $\omega_3$  звеньев 2 и 3. Имеем

$$\begin{aligned}\omega_2 &= V_{BA}/l_{BA} = ba \cdot \mu_V / l_{BA}; \\ \omega_3 &= V_{BC}/l_{BC} = bc \cdot \mu_V / l_{BC},\end{aligned}\quad (5.3)$$

где  $\mu_V$  – масштабный коэффициент плана скоростей,  $l_{BA}$ ,  $l_{BC}$  – длины звеньев 2 и 3 соответственно.

Направления угловых скоростей звеньев определяются с использованием плана скоростей. Так, вектор  $\vec{ba}$ , изображающей скорость  $\vec{V}_{BA}$ , мысленно перенесем в точку  $B$  звена 2 и находим, что относительно полюса  $A$  звено 2 вращается по часовой стрелке (рис. 2, а). Аналогично вектор  $\vec{bc}$ , изображающий скорость  $\vec{V}_{BC}$ , перенесенный параллельно в точку  $B$  звена 3 плана механизма указывает на то, что звено 3 вращается против часовой стрелки.

Пусть теперь для рассматриваемой структурной группы известны ускорения в точках  $A$  и  $C$  (рис. 2, з).

Уравнения для ускорения в точке  $B$ , записанные для звеньев 2 и 3 образуют систему

$$\begin{cases} \vec{a}_B = \vec{a}_A + \frac{\vec{a}_{BA}^n}{\|BA\|} + \frac{\vec{a}_{BA}^\tau}{\perp BA}, \\ \vec{a}_B = \vec{a}_C + \frac{\vec{a}_{BC}^n}{\|BC\|} + \frac{\vec{a}_{BC}^\tau}{\perp BC}. \end{cases}\quad (5.4)$$

Величины нормальных ускорений определяются в соответствии с (4.4)

$$a_{BA}^n = l_{BA}\omega_2^2, \quad a_{BC}^n = l_{BC}\omega_3^2. \quad (5.5)$$

Как в случае системы векторных уравнений для скоростей, левые части уравнений (5.4) одинаковы, значит, одинаковы и правые части. Поэтому неизвестные величины тангенциальных ускорений  $a_{BA}^\tau$  и  $a_{BC}^\tau$  находятся графическим построением плана ускорений, представляющим равенство суммы векторов правой части первого уравнения из (5.4) сумме векторов правой части второго уравнения. Векторы, изображающие ускорения  $\vec{a}_A$  и  $\vec{a}_C$ , показаны на плане ускорений с масштабным коэффициентом  $\mu_a$  (рис. 2, з). Из точек  $a$  и  $c$  плана ускорений проведем лучи, параллельные  $BA$  и  $BC$  и на-

правленные от  $B$  к  $A$  и от  $B$  к  $C$ , соответственно. На этих лучах отложим векторы  $\vec{an}_1$  и  $\vec{cn}_2$ , изображающие нормальные ускорения  $\vec{a}_{BA}^n$  и  $\vec{a}_{BC}^n$ . Их величины будут

$$an_1 = a_{BA}^n / \mu_a, \quad cn_2 = a_{BC}^n / \mu_a. \quad (5.6)$$

Далее через точку  $n_1$  проведем линию, перпендикулярную  $BA$ , а через точку  $n_2$  – линию, перпендикулярную  $BC$ . Точка пересечения этих линий завершает графическое построение равенства сумм правых частей системы (5.4). Так как каждая из этих сумм векторов равна ускорению в точке  $B$ , то, соединив на плане ускорений общее начало  $\pi$  векторов  $\vec{\pi a}$  и  $\vec{\pi c}$  с указанной точкой пересечения, находим вектор  $\vec{\pi b}$ , изображающий ускорение  $\vec{a}_B$ . Векторы  $\vec{n_1 b}$  и  $\vec{n_2 b}$  изображают тангенциальные ускорения  $a_{BA}^\tau$  и  $a_{BC}^\tau$ , величины которых будут

$$a_{BA}^\tau = n_1 b \cdot \mu_a, \quad a_{BC}^\tau = n_2 b \cdot \mu_a. \quad (5.7)$$

После построения плана ускорений группы определяются угловые ускорения звеньев 2 и 3:

$$\varepsilon_2 = a_{BA}^\tau / l_{BA}, \quad \varepsilon_3 = a_{BC}^\tau / l_{BC}. \quad (5.8)$$

В соответствии с направлениями векторов  $\vec{n_1 b}$  и  $\vec{n_2 b}$ , перенесенных в точку  $B$  звеньев 2 и 3, определяются направления угловых ускорений  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$ .

5.2.2. Менее подробно рассмотрим остальные виды структурных групп

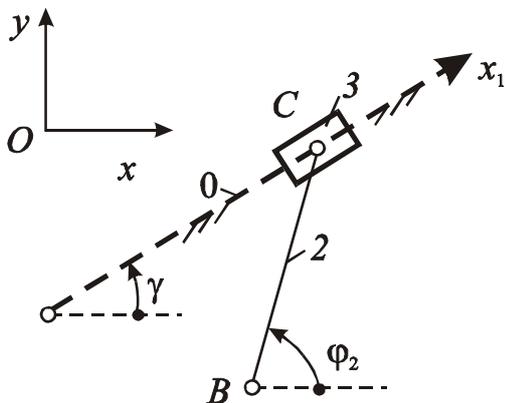


Рисунок 3

второго класса, ограничиваясь записью систем векторных уравнений для скоростей и для ускорений, определяющих скорость и ускорение во внутренней кинематической паре, представляя наиболее часто встречающиеся случаи соединения внешних кинематических пар групп с исходной кинематической цепью.

Пусть группа звеньев 2–3 с двумя вращательными кинематическими парами и одной внешней поступательной парой (так называемая шатунная группа) соединена поступательной парой со стой-

кой 0 (рис. 3).

Известные скорости  $\vec{V}_B$  и  $\vec{V}_{C_0}$ , и ускорения  $\vec{a}_B$  и  $\vec{a}_{C_0}$  в точках присоединения  $B$  и  $C_0$  внешних кинематических пар группы, причем  $\vec{V}_{C_0} = 0$ ,  $\vec{a}_{C_0} = 0$ , так как ползун 3 перемещается по стойке 0.

Система векторных уравнений для скоростей записывается следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{V}_{C_2} = \vec{V}_B + \frac{\vec{V}_{CB}}{\perp CB}; \\ \vec{V}_{C_3} = \frac{\vec{V}_{3-0}}{\parallel Cx_1}. \end{array} \right. \quad (5.9)$$

Левые части уравнений (5.9) равны, так как точки  $C_2$  и  $C_3$  совпадают. Следовательно,

$$\frac{\vec{V}_B}{\perp CB} + \frac{\vec{V}_{CB}}{\perp CB} = \frac{\vec{V}_{3-0}}{\parallel Cx_1}. \quad (5.10)$$

Система векторных уравнений для ускорений будет

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_{C_2} = \vec{a}_B + \frac{\vec{a}_{CB}^n}{\parallel CB} + \frac{\vec{a}_{CB}^\tau}{\perp CB}; \\ \vec{a}_{C_3} = \frac{\vec{a}_{3-0}}{\parallel Cx_1}, \end{array} \right. \quad (5.11)$$

где  $\vec{a}_{C_2} = \vec{a}_{C_3}$ , поэтому

$$\frac{\vec{a}_B}{\perp CB} + \frac{\vec{a}_{CB}^n}{\parallel CB} + \frac{\vec{a}_{CB}^\tau}{\perp CB} = \frac{\vec{a}_{3-0}}{\parallel Cx_1}. \quad (5.12)$$

Величина вектора нормального ускорения  $\vec{a}_{CB}^n$  известна, так как находится после определения угловой скорости  $\omega_2$  в результате построение плана скоростей по формуле  $a_{CB}^n = l_{CB}\omega_2^2$ .

5.2.3. Для группы звеньев с двумя внешними вращательными кинематическими парами и внутренней поступательной парой (кулисная группа, см. рис. 4) известны скорости  $\vec{V}_B$  и  $\vec{V}_{A_2}$  и ускорения  $\vec{a}_B$  и  $\vec{a}_{A_2}$  в точках  $B$  и  $A_2$  внешних пар группы, причем  $\vec{V}_B = 0$ ,  $\vec{a}_B = 0$ , так как точка  $B$  принадлежит стойке.

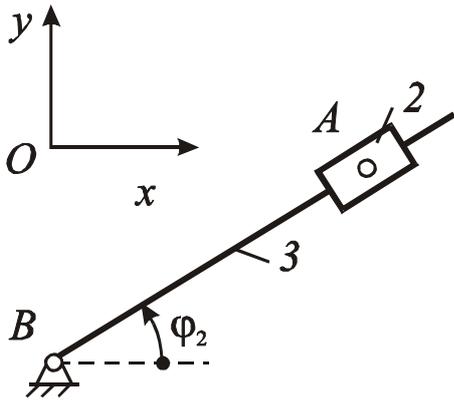


Рисунок 4

Система векторных уравнений для скоростей записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \vec{V}_{A_3} = \vec{V}_{A_2} + \vec{V}_{3-2}, \\ \vec{V}_{A_3} = \vec{V}_{AB} \end{cases} \quad (5.13)$$

$\frac{\perp AB}{\parallel AB}$

Эта система равносильна уравнению

$$\frac{\vec{V}_{A_2}}{\perp AB} + \frac{\vec{V}_{3-2}}{\parallel AB} = \frac{\vec{V}_{AB}}{\perp AB}, \quad (5.14)$$

решение которого относительно величин  $V_{3-2}$  и  $V_{AB}$  находится графическим построением плана скоростей группы.

Система векторных уравнений для ускорений

$$\begin{cases} \vec{a}_{A_3} = \vec{a}_{A_2} + \frac{\vec{a}_{3-2}^k}{\perp AB} + \frac{\vec{a}_{3-2}}{\parallel AB}, \\ \vec{a}_{A_3} = \frac{\vec{a}_{AB}^n}{\parallel AB} + \frac{\vec{a}_{AB}^\tau}{\perp AB}, \end{cases} \quad (5.15)$$

равносильна уравнению

$$\frac{\vec{a}_{A_2}}{\perp AB} + \frac{\vec{a}_{3-2}^k}{\parallel AB} + \frac{\vec{a}_{3-2}}{\parallel AB} = \frac{\vec{a}_{AB}^n}{\parallel AB} + \frac{\vec{a}_{AB}^\tau}{\perp AB}, \quad (5.16)$$

решение которого относительно величин  $a_{3-2}$  и  $a_{AB}^\tau$  находится графическим построением плана ускорений группы. Из плана ускорений определяется и ускорение  $\vec{a}_{A_3}$ .

Направление вектора кориолисова ускорения  $\vec{a}_{3-2}^k$  определяется по правилу Жуковского Н. Е. (см. п. 4), а его величина находится после определения угловой скорости  $\omega_3$  в результате построения плана скоростей по формуле  $\vec{a}_{3-2}^k = 2\omega_3 V_{3-2}$ . Направление нормального ускорения  $\vec{a}_{AB}^n$  соответствует направлению от  $A$  до  $B$  (рис. 4), а величина  $\vec{a}_{AB}^n = l_{AB} \cdot \omega_3^2$ , причем  $l_{AB}$  приходится находить по формуле  $l_{AB} = AB \cdot \mu_l$ , где  $AB$  – расстояние от  $A$  к  $B$  в мм на плане группы, а  $\mu_l$  – масштабный коэффициент плана группы.

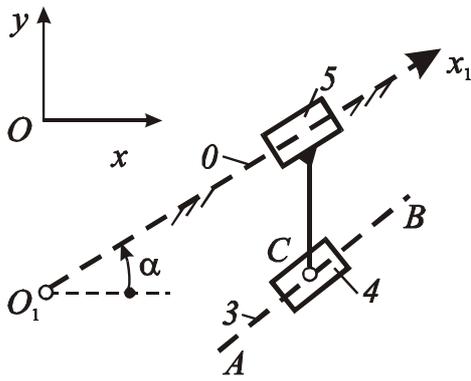


Рисунок 5

5.2.4. Рассмотрим группу из двух звеньев 4 и 5 с внешними поступательными парами и внутренней вращательной парой (рис. 5). Пусть ползун 5 перемещается по неподвижной направляющей. Известными являются скорости и ускорения точек  $C_3$  и  $C_0$  перемещения внешних кинематических пар:  $\vec{V}_{C_3}$ ,  $\vec{V}_{C_0}$  и  $\vec{a}_{C_3}$ ,  $\vec{a}_{C_0}$ , причем  $\vec{V}_{C_0} = 0$  и  $\vec{a}_{C_0} = 0$ . Известна также угловая скорость

$\omega_3 = \omega_4$  звена 3, к которому присоединен ползун 4.

Система векторных уравнений для скоростей:

$$\begin{cases} \vec{V}_{C_4} = \vec{V}_{C_3} + \frac{\vec{V}_{4-3}}{\|AB\|}, \\ \vec{V}_{C_5} = \frac{\vec{V}_{5-0}}{\|O_1x_1\|}. \end{cases} \quad (5.17)$$

Левые части уравнений (5.17) равны, так как точки  $C_4$  и  $C_5$  совпадают. Поэтому из равенства правых частей имеем:

$$\frac{\vec{V}_{C_3}}{\|AB\|} + \frac{\vec{V}_{4-3}}{\|O_1x_1\|} = \frac{\vec{V}_{5-0}}{\|O_1x_1\|}, \quad (5.18)$$

откуда путем построения плана скоростей определяются величины относительных скоростей  $\vec{V}_{4-3}$  и  $\vec{V}_{5-0}$ , а также скорость  $\vec{V}_{C_5}$ .

Система векторных уравнений для ускорений:

$$\begin{cases} \vec{a}_{C_4} = \frac{\vec{a}_{C_3}}{\perp AB} + \frac{\vec{a}_{4-3}^k}{\|AB\|} + \frac{\vec{a}_{4-3}}{\|AB\|}, \\ \vec{a}_{C_5} = \frac{\vec{a}_{5-0}}{\|O_1x_1\|}. \end{cases} \quad (5.19)$$

Из равенства левых частей уравнений (5.19) следует:

$$\frac{\vec{a}_{C_3}}{\perp AB} + \frac{\vec{a}_{4-3}^k}{\|AB\|} + \frac{\vec{a}_{4-3}}{\|AB\|} = \frac{\vec{a}_{5-0}}{\|O_1x_1\|}. \quad (5.20)$$

Решение этого уравнения относительно относительных ускорений  $\vec{a}_{4-3}$  и

$\vec{a}_{5-0}$  производится путем графического построения плана ускорений группы. Направление кориолисова ускорения  $\vec{a}_{4-3}^k$  определяется по правилу Жуковского Н. Е. (см. п. 4), а его величина находится по формуле  $\vec{a}_{4-3}^k = 2\omega_3 V_{4-3}$ , где  $\omega_3$  – угловая скорость звена 3, с которым звено 4 составляет поступательную пару. После построения плана ускорений группы определяется и скорость  $\vec{V}_{C_4} = \vec{V}_{C_5}$ , которая очевидно направлена параллельно неподвижной направляющей звена 5.

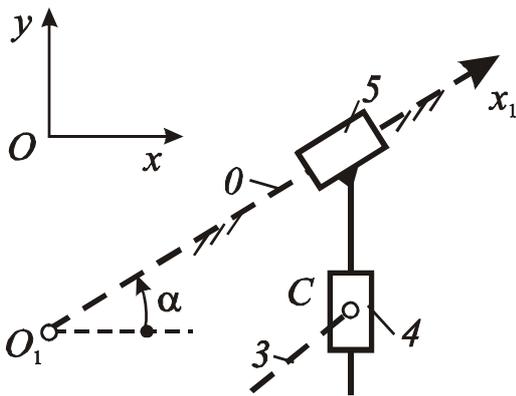


Рисунок 6

5.2.5. Рассмотрим пятый вид структурной группы звеньев 4 и 5 второго класса – группу с двумя поступательными и одной внешней вращательной парой (рис. 6). Ползун 5 перемещается по неподвижной направляющей 0. Известными являются скорости и ускорения точек присоединения внешних кинематических пар  $\vec{V}_{C_4} = \vec{V}_{C_3}$ ,  $\vec{a}_{C_4} = \vec{a}_{C_3}$  и

$\vec{V}_{C_0}$ ,  $\vec{a}_{C_0}$ .

Векторные уравнения для скоростей составляют систему:

$$\begin{cases} \vec{V}_{C_5} = \vec{V}_{C_4} + \vec{V}_{5-4}, \\ \vec{V}_{C_5} = \vec{V}_{5-0}, \end{cases} \quad (5.21)$$

из которой следует, что

$$\vec{V}_{C_4} + \vec{V}_{5-4} = \vec{V}_{5-0}. \quad (5.22)$$

Аналогичные уравнения получаем и для ускорений:

$$\begin{cases} \vec{a}_{C_5} = \vec{a}_{C_4} + \vec{a}_{5-4}, \\ \vec{a}_{C_5} = \vec{a}_{5-0}. \end{cases} \quad (5.23)$$

Из (5.23) следует, что

$$\frac{\vec{a}_{C_4} + \vec{a}_{5-4}}{\|Oy\|} = \frac{\vec{a}_{5-0}}{\|O_1x_1\|}. \quad (5.24)$$

Относительные скорости  $\vec{V}_{5-4}$  и  $\vec{V}_{5-0}$  и ускорения  $\vec{a}_{5-4}$  и  $\vec{a}_{5-0}$  определяются из построения плана скоростей по уравнению (5.22) и плана ускорений по уравнению (5.24).

## 6. Правило подобия для планов скоростей и ускорений. Пример кинематического исследования плоского рычажного механизма

6.1. При кинематическом исследовании, кроме определения скоростей и ускорений осей шарниров или сходственных им точек, обозначенных одинаковыми буквами с индексами, соответствующими номерам звеньев, которые на плане механизма перекрыты этими шарнирами, необходимо определить скорости и ускорения ряда других точек звеньев – точек присоединения следующих структурных групп, а также точек, обозначающих центры масс звеньев и др. Для этого применяется следующее правило подобия.

Если три точки принадлежат звену, совершающему плоское движение, и образуют треугольник, то этот треугольник будет подобным треугольнику, образованному одноименными точками на плане скоростей (ускорений), причем последовательность обхода вершин этих треугольников (по стрелке или против часовой стрелки) должна соответствовать одинаковой последовательности их буквенных обозначений.

6.2.1. Кинематическое исследование графоаналитическим методом на примере шестизвенного механизма второго класса, кинематическая схема которого приведена на рис. 7, а.

Размеры начального звена  $l_{OA}$  и расстояния  $l_{BS_3}$ , определяющего положение центра масс  $S_3$  звена 3, а также координаты  $x_B$ ,  $y_B$  неподвижного шарнира  $B$  и  $y_C$  – точки  $C$  неподвижной направляющей ползуна 5 заданы в метрах. На чертеже кинематическая схема – план механизма – изображается для заданного угла  $\varphi_1$  поворота начального звена  $I$  в миллиметрах с масштабным коэффициентом длин  $\mu_l$ , который как правило, принимается по размеру  $OA$  звена  $I$ , то есть  $\mu_l = l_{OA}/OA$  м/мм, где  $OA = 25\text{--}50$  мм. Остальные размеры на плане механизма находятся по формулам:

$$BS_3 = l_{BS_3}/\mu_l, \quad \bar{x}_B = x_B/\mu_l, \quad \bar{y}_B = y_B/\mu_l, \quad \bar{y}_C = y_C/\mu_l,$$

где  $\bar{x}_B, \bar{y}_B, \bar{y}_C$  – координаты точек  $C$  и  $B$  в миллиметрах.

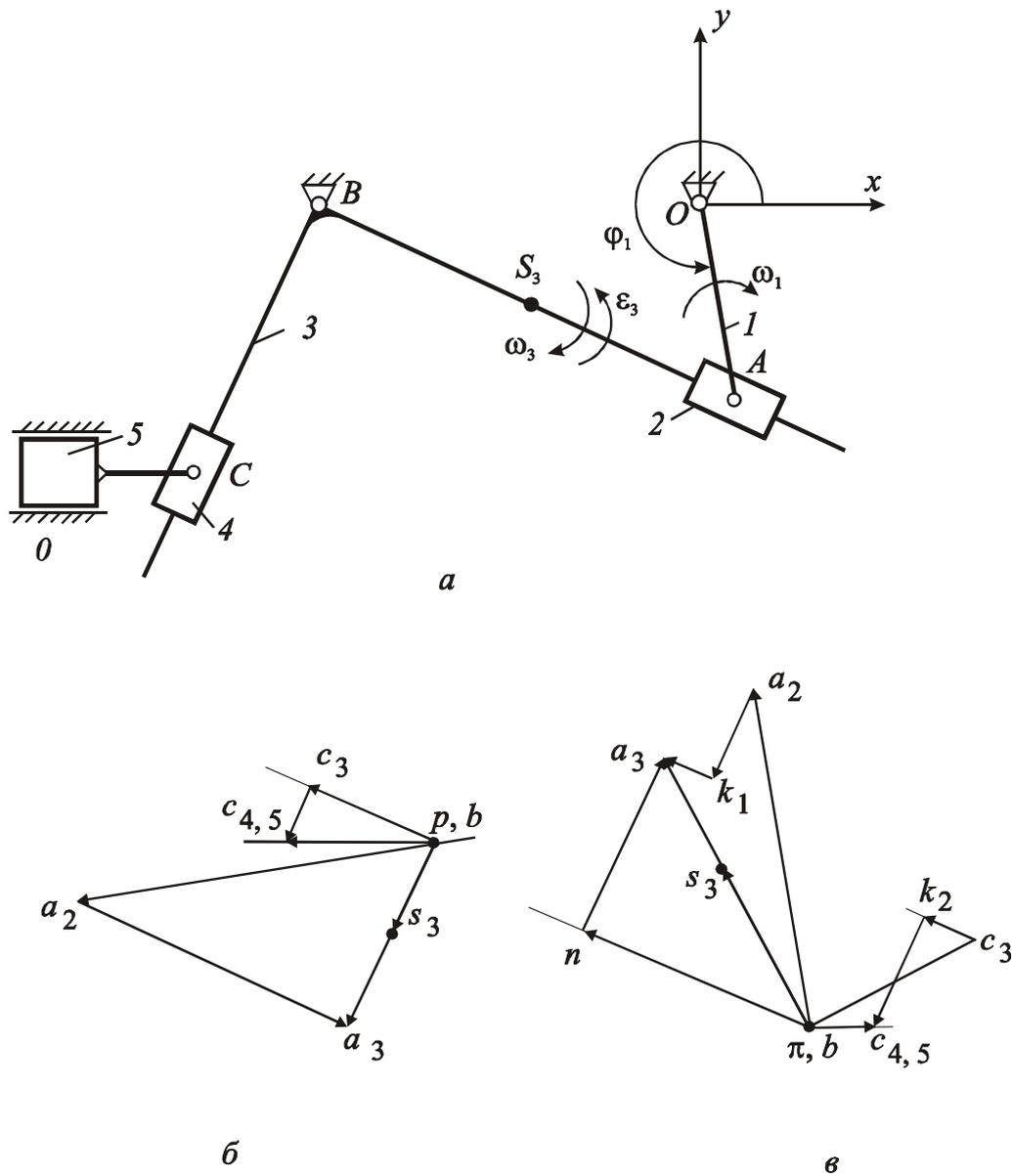


Рисунок 7

Перед построением планов скоростей и ускорений строится структурная схема, с целью определения структурных групп и последовательности их присоединения при образовании механизма (рис. 8).

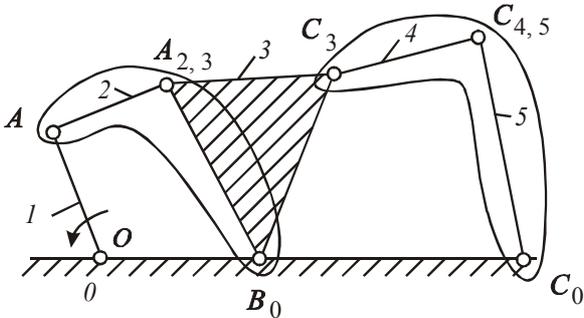


Рисунок 8

Как следует из структурной схемы, первой структурной группой является группа звеньев 2 и 3, второй – звенья 4 и 5. Вид первой группы со-

ответствует показанному на рис. 4, второй – на рис. 5.

6.2.2. Построение плана скоростей начинается с выбора масштабного коэффициента  $\mu_V$ , м/с·мм и определения вектора  $\vec{pa}_2$ , изображающего скорость  $\vec{V}_{A_2}$  точки  $A$  начального звена механизма – кривошипа. Скорость  $V_{A_2} = V_{A_1} = l_{OA}\omega_1$ , где  $\omega_1$  – угловая скорость кривошипа, которая находится по заданному числу оборотов  $n_1$ :  $\omega_1 = \pi n_1 / 30$ . Тогда на плане скоростей

$$pa_2 = V_{A_2} / \mu_V.$$

Выбрав произвольно положение полюса  $p$  плана скоростей, строим вектор  $\vec{pa}_2$  перпендикулярно к  $OA$  в направлении, соответствующем направлению угловой скорости  $\omega_1$  (рис. 7, б). Рядом с обозначением полюса плана скоростей записывается буква  $b$ , так как точка  $B$  на плане механизма принадлежит стойке.

Для дальнейшего построения плана скоростей записывается система векторных уравнений для скоростей первой структурной группы звеньев 2 и 3:

$$\begin{cases} \vec{V}_{A_3} = \vec{V}_{A_2} + \vec{V}_{3-2}, \\ \vec{V}_{A_3} = \vec{V}_B + \vec{V}_{AB}. \end{cases} \quad (6.1)$$

Из равенства левых частей этой системы уравнений с учетом  $\vec{V}_B = 0$  получаем уравнение

$$\vec{V}_{A_3} = \vec{V}_{A_2} + \vec{V}_{3-2} = \vec{V}_{AB}. \quad (6.2)$$

Построение векторов, изображающих скорости  $\vec{V}_{3-2}$  и  $\vec{V}_{AB}$  на плане скоростей производится с учетом (6.2) по правилу суммирования векторов. Через конец вектора  $\vec{pa}_2$  проводится линия параллельно  $AB$ , а через начало этого вектора – полюс  $p$  – проводится линия перпендикулярно  $AB$  (рис. 7, б). Обозначим точку пересечения этих линий буквой  $a_3$ . Очевидно, вектор  $\vec{pa}_3$  изображает скорость  $\vec{V}_{3-2}$ , а вектор  $\vec{ba}_3$  – скорость  $\vec{V}_{AB}$ . Вместе с тем, из вто-

рого уравнения системы (6.1) видно, что вектор  $\vec{pa}_3 = \vec{ba}_3$  есть вектор, изображающий скорость  $\vec{V}_{A_3}$  точки  $A_3$  звена 3.

Точки  $s_3$  и  $c_3$  на плане скоростей находятся путем применения правила подобия (п. 6.1). Для этого на отрезке  $ba_3$  плана скоростей отметим точку  $s_3$  на расстоянии  $bs_3 = ba_3 \cdot BS_3/BA$ . Размер  $ba_3$  принимается с плана скоростей, размеры  $BS_3$  и  $BA$  – с плана механизма. Затем строится треугольник  $a_3bc_3$ , подобный треугольнику  $ABC$  на плане механизма, и здесь также  $bc_3 = ba_3 \cdot BC/BA$ . Вектор  $\vec{pc}_3$  изображает скорость  $\vec{V}_{C_3}$  точки  $C$  звена 3.

Система векторных уравнений для скоростей второй структурной группы звеньев 4 и 5 будет

$$\begin{cases} \vec{V}_{C_4} = \vec{V}_{C_3} + \vec{V}_{4-3}, \\ \vec{V}_{C_5} = \vec{V}_{5-0}. \end{cases} \quad (6.3)$$

Так как  $\vec{V}_{C_4} = \vec{V}_{C_5}$ , то

$$\vec{V}_{C_3} + \vec{V}_{4-3} = \vec{V}_{5-0}. \quad (6.4)$$

Для изображения этого равенства на плане скоростей через точку  $c_3$  вектора  $\vec{pc}_3$  проводится линия параллельно  $BC$ , а через точку  $p$  – линия, параллельная  $Ox$ . Вектор с концом в точке пересечения этих линий и с началом в полюсе  $p$  изображает скорость  $\vec{V}_{5-0}$ , а значит и скорость  $\vec{V}_{C_5}$  (в силу второго уравнения системы (6.3)). Поэтому в этой точке плана скоростей ставится буква  $c_{4,5}$  (рис. 7, б).

После построения плана скоростей механизма следует определить величину скорости выходного звена 5:  $\vec{V}_{C_5} = pc_5 \cdot \mu_V$ , а также угловую скорость  $\omega_3$  звена 3:  $\omega_3 = V_{AB}/l_{AB} = a_3b \cdot \mu_V / (AB \cdot \mu_l)$ . Направление угловой скорости  $\omega_3$  определяется с помощью плана скоростей в соответствии с направлением вектора  $\vec{a_3b}$  (рис. 7, б), мысленно перенесенного в точку  $A_3$  плана механизма.

6.2.3. Для построения плана ускорений выбирается масштабный коэффициент  $\mu_a$ ,  $\text{м/с}^2 \cdot \text{мм}$  и определяется величина вектора  $\vec{\pi a}_2$ , изображающего ускорение  $\vec{a}_{A_2}$  точки  $A_2$  звена 2. Ускорение  $a_{A_2} = a_{A_1} = l_{OA} \omega_1^2$ . Тогда  $\pi a_2 = a_{A_2} / \mu_a$ .

После произвольного выбора положения полюса  $\pi$  плана ускорений строится вектор  $\vec{\pi a}_2$  параллельно  $OA$  в направлении от  $A$  к  $O$  (рис. 7, в). В полюсе плана ускорений рядом с буквой  $\pi$  отмечается и буква  $b$ , так как точка  $B$  на плане механизма принадлежит стойке.

Система векторных уравнений для ускорений первой структурной группы рассматриваемого механизма имеет вид:

$$\begin{cases} \vec{a}_{A_3} = \vec{a}_{A_2} + \frac{\vec{a}_{3-2}^k}{\perp AB} + \frac{\vec{a}_{3-2}}{\parallel AB}, \\ \vec{a}_{A_3} = \vec{a}_B + \frac{\vec{a}_{AB}^n}{\parallel AB} + \frac{\vec{a}_{AB}^\tau}{\perp AB}. \end{cases} \quad (6.5)$$

Из равенства левых частей системы (6.5) с учетом  $\vec{a}_B = 0$  получается следующее уравнение:

$$\frac{\vec{a}_{A_2}}{\perp AB} + \frac{\vec{a}_{3-2}^k}{\parallel AB} + \frac{\vec{a}_{3-2}}{\perp AB} = \frac{\vec{a}_{AB}^n}{\parallel AB} + \frac{\vec{a}_{AB}^\tau}{\perp AB}. \quad (6.6)$$

Здесь величины кориолисова и нормального ускорений  $\vec{a}_{3-2}^k$  и  $\vec{a}_{AB}^n$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} a_{3-2}^k &= 2\omega_3 V_{3-2}, \\ a_{AB}^n &= l_{AB} \cdot \omega_3^2. \end{aligned}$$

Направление кориолисова ускорения определяется по правилу Жуковского Н. Е., то есть находится поворотом на  $90^\circ$  относительной скорости  $\vec{V}_{3-2}$  по направлению угловой скорости  $\omega_3$ . Нормальное ускорение  $\vec{a}_{AB}^n$  направлено параллельно  $AB$  от  $A$  к  $B$ .

Сумма векторов, изображающих ускорения левой части уравнения (6.6), строится на плане ускорений. Первый вектор  $\vec{\pi a}_2$  определен выше; величина второго вектора  $a_2 k_1 = a_{3-2}^k / \mu_a$ , мм (рис. 7, в); для третьего вектора через конец второго – точку  $k_1$  проводится прямая линия, параллельная  $AB$ .

Построение суммы векторов, изображающих правую часть уравнения (6.6), начинается из начала первого вектора левой части, то есть из точки  $b$ . Величина первого вектора  $bn = a_{AB}^n / \mu_a$ , мм. Для второго вектора проводится прямая линия через точку  $n$  перпендикулярно  $AB$ . Точка пересечения этой линии с линией, проведенной через точку  $k_1$ , определяет на плане ускорений векторы, изображающие ускорения  $\vec{a}_{3-2}$  и  $\vec{a}_{AB}^\tau$ . Поскольку каждая из сумм векторов уравнения (6.6) равна ускорению  $\vec{a}_{A_3}$  в точке  $A_3$ , то вектор  $\vec{pa}_3 = \vec{ba}_3$  на плане ускорений изображает это ускорение (рис. 7, в).

Определение точек  $s_3$  и  $c_3$  на плане ускорений производится путем применения правила подобия аналогично тому, как это было показано при построении плана скоростей (рис. 7, в).

Система векторных уравнений для ускорений второй структурной группы

$$\begin{cases} \vec{a}_{C_4} = \vec{a}_{C_3} + \frac{\vec{a}_{4-3}^k}{\perp BC} + \frac{\vec{a}_{4-3}}{\|BC\|}, \\ \vec{a}_{C_5} = \vec{a}_{5-0}. \end{cases} \quad (6.7)$$

Так как  $\vec{a}_{C_4} = \vec{a}_{C_5}$ , то из (6.7)

$$\begin{cases} \vec{a}_{C_3} + \frac{\vec{a}_{4-3}^k}{\perp BC} + \frac{\vec{a}_{4-3}}{\|BC\|} = \frac{\vec{a}_{5-0}}{\|Ox\|}, \\ \vec{a}_{C_5} = \vec{a}_{5-0}. \end{cases} \quad (6.8)$$

Величина кориолисова ускорения  $\vec{a}_{4-3}^k$  есть  $a_{4-3}^k = 2\omega_3 V_{4-3}$ , а направление определяется поворотом вектора  $\vec{V}_{4-3}$  (см. вектор  $\vec{c}_3 c_4$  на плане скоростей, рис. 7, б) на  $90^\circ$  по направлению угловой скорости  $\omega_3$ . Векторы  $\vec{c}_3 k_2$ ,  $k_2 c_{4,5}$  и  $bc_{4,5}$  на плане ускорений (рис. 7, в) изображают ускорения  $\vec{a}_{4-3}^k$ ,  $\vec{a}_{4-3}$  и  $\vec{a}_{5-0}$  соответственно.

После построения плана ускорений следует определить угловое ускорение  $\varepsilon_3$  звена 3 механизма. Тангенциальное ускорение  $\vec{a}_{AB}^\tau$  в точке  $A$  звена 3 изображается на плане ускорений вектором  $\vec{na}_3$ , поэтому  $a_{AB}^\tau = na_3 \cdot \mu_a$ ,

а угловое ускорение  $\varepsilon_3 = a_{AB}^r / l_{AB} = na_3 \cdot \mu_a / AB \cdot \mu_l$ . Направление углового ускорения находится с помощью плана ускорений в соответствии с направлением вектора  $\vec{na_3}$ , мысленно перенесенного в точку  $A$  плана механизма.

### Список литературы

1. Артоболевский И. И. Теория механизмов и машин: Учеб. для ВТУЗов – М: Наука, 1988. – 640 с.
2. Теория механизмов и машин: Учеб. для ВТУЗов/К. В. Фролов, С. А. Попов и др./ Под ред. К. В. Фролова. – М.: Высш. шк., 1987. – 496 с.
3. Левитская О. Н., Левитский Н. И. Курс теории механизмов и машин. Учебник для Вузов. – М.: Высш. шк., 1978. – 270 с.
4. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин. Кореняко А. С. и др. – Киев: Вища шк., 1970. – 332 с.
5. Теория механизмов и машин. Системный подход: Учеб. пособие/ А. А. Грунауэр, И. Д. Долгих. – К.: УМК ВО, 1992. – 384 с.
6. Методические указания по применению ЭВМ при выполнении курсового проекта по теории механизмов и машин для студентов машиностроительных специальностей./ В. А. Новгородцев, В. Б. Зеленский, Г. А. Кротенко и др. – Харьков: ХГПУ, 1998. – 37 с.

## Содержание

Вступление.....	3
1. Задачи кинематического исследования. Исходные данные.....	3
2. Методы кинематического исследования.....	4
3. Этапы кинематического исследования.....	4
4. Векторные уравнения для определения скоростей и ускорений.....	5
5. Графоаналитический метод кинематического исследования.....	7
6. Правило подобия для планов скоростей и ускорений. Пример кинематического исследования плоского шарнирно-рычажного механизма....	16
Список литературы.....	22

Навчальне видання

Теорія механізмів и машин. Методичні вказівки до виконання розділу курсового проекту „Кінематичне дослідження плоских шарнірно-важільних механізмів графоаналітичним методом” для студентів машинобудівельних спеціальностей

Російською мовою

Укладачі: ТКАЧУК Микола Анатолійович  
ЗЕЛЕНСЬКИЙ Володимир Борисович  
ЗІНЧЕНКО Олена Іванівна  
ГРИЦЕНКО Геннадій Дмитрович

Відповідальний за випуск М. А. Ткачук  
Роботу рекомендував до видання В. К. Белов

В авторській редакції  
Комп’ютерна верстка І. Я. Храмцова

План 2007 р., п. 20/

Підп. до друку  
Друк – ризографія.  
Обл. – вид. арк. 1,4.

Формат 60x841/16.  
Гарнітура Times.  
Тираж 50 прим. Зам. №

Папір друк. №2.  
Ум. друк. арк. 1,0.  
Ціна договірна

---

Видавничий центр НТУ „ХПІ”, 61002 Харків, вул. Фрунзе, 21  
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК №116 від 10.07.2000 р.

---

Друкарня НТУ „ХПІ”, 61002 Харків, вул. Фрунзе, 21