УДК 539.3

Ю.В. НАУМЕНКО, НТУ «ХПІ», Харків, Україна
К.В. АВРАМОВ, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ», Харків, Україна

Коливання циліндричної оболонки, заповненої ідеальною нестисливою рідиною

Інтерес до проблеми дослідження динаміки оболонок і оболонкових конструкцій при взаємодії з рідиною виник ще в середині минулого століття і не вщухає дотепер. Це пов'язано з широким застосуванням у техніці таких конструкцій, як наприклад, баки і цистерни для перевезення і зберігання рідин. Слід зазначити, що в більшості робіт розглядаються циліндричні оболонки; для чисельного моделювання застосовується метод скінченних елементів.

Розглянемо циліндричну оболонку, що містить рідину. Припускаємо, що оболонка заповнена рідиною повністю. Потрібно визначити частоти і форми коливань оболонки з урахуванням сил тиску та швидкості руху рідини. Припустимо, що рідина є ідеальною і нестисливою.

Збурюючі сили можуть включати в себе вітрові навантаження, силу тяжіння, а також сейсмічні і ударні впливи. Будемо шукати власні форми коливань заповненої оболонки у вигляді суми ряду по формам коливань незаповненої оболонки. В роботі отримано аналітичний розв'язок задачі визначення вільних коливань незаповненої оболонки.

Припускаємо, що рух рідини, що заповнює оболонку, є безвихровим (потенційним). Зазначимо, що згідно теоремі Томсона, при русі ідеальної нестисливої рідини під дією потенційних сил, циркуляція швидкості по замкненому рідкому контуру не змінюється з часом. Це означає, наприклад, що рух рідини, що почався зі стану спокою, залишається потенційним в усі наступні моменти часу.

Розглядаємо циліндричну оболонку, в якій рідина рухається з постійною швидкістю $\vec{V} = \vec{i}\,V$, тобто паралельною твірній оболонки. Припускаємо, що коливання оболонки збуджують малий рух рідини. Вважаємо також, що рух рідини буде потенційним. Швидкість рідини буде обчислюватися за формулою $\vec{v} = \mathrm{grad}\Phi; \quad \Phi = Vx + \varphi$, де φ - потенціал збуреного руху рідини, що викликаний малими коливаннями оболонки.

При цьому тиск рідини визначатиметься з лінеарізованого інтегралу Коші-Лагранжа

$$p - p_0 = -\rho_l \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right).$$

Внаслідок лінійності задачі потенціал швидкостей також зображається в вигляді суми ряду часткових потенціалів, які є розв'язками таких крайових задач Неймана [1]:

$$\Delta\varphi_n = 0; \quad \left.\frac{\partial\varphi_n}{\partial n}\right|_{S_1} = w_n; \quad \left.\frac{\partial\varphi_k}{\partial n}\right|_{S_i, S_o} = 0,$$

де w_n – нормальна складова нормованої власної форми коливань незаповненої оболонки, S_1 – циліндрична поверхня оболонки, S_i, S_o – поверхні входу та виходу рідини з оболонки; вважаємо їх плоскими кругами, що обмежують циліндричну поверхню за торців.

Запишемо рівняння руху оболонки з рідиною в операторній формі

$$\mathbf{L}\{\vec{U}_n\} = \rho h \frac{\partial^2 \vec{U}_n}{\partial t^2} + \mathbf{P}.$$

Тут **P** – вектор тиску рідини. Застосовуючи розкладення форм коливань оболонки з рідиною та потенціалу швидкостей у відповідні ряди, та переходячи до проблеми власних коливань , отримаємо

$$\omega^2\left(E + \frac{\rho_l L}{\rho h}\Lambda\right)\{\alpha\} - \omega\frac{\rho_l L}{\rho h}\frac{V}{L}\Lambda^1\{\alpha\} + \Omega_d\{\alpha\} = 0. \tag{1}$$

Введемо позначення

$$\Omega_w = \left(E + \frac{\rho_l L}{\rho h}\Lambda\right)^{-1}\Omega_d; \quad \Lambda^{1w} = \frac{\rho_l L}{\rho h}\frac{V}{L}\left(E + \frac{\rho_l L}{\rho h}\Lambda\right)^{-1}\Lambda^1.$$

Тоді рівність (1) набуває вигляду

$$\omega^2\{\alpha\} - \omega\Lambda^{1w}\{\alpha\} + \Omega_w\{\alpha\} = 0.$$

Отримано аналог проблеми власних значень. Цю проблему зводимо до класичної проблеми власних значень таким чином. Введемо новий вектор невідомих розмірності $2N$, а саме $\{\alpha \quad \alpha\omega\}^T$ та матрицю розмірності $2N \times 2N$ у вигляді $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -\Omega_w & \Lambda^{1w} \end{pmatrix}$. Отримаємо

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ -\Omega_w & \Lambda^{1w} \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \alpha \\ \omega\alpha \end{Bmatrix} = \omega\begin{Bmatrix} \alpha \\ \omega\alpha \end{Bmatrix}. \tag{2}$$

Рівняння (2) є класичною проблемою власних значень. Для її розв’язання використані стандартні процедури.

В роботі здійснено аналіз впливу рідини на значення частот власних коливань циліндричної оболонки. Проведені розрахунки частот коливань при різних значення швидкості рідини. Встановлено, які значення швидкості можуть призвести до втрати стійкості системи «оболонка-рідина».

Список літератури:

1. *Тихонов А. Н.* Уравнения математической физики /*А. Н. Тихонов, А. А. Самарский* // Наука. – 1972. – 736 с.