УДК 665.9

Д.С. РЫБАКОВ, ***А.С. КУЦЕНКО***, докт. техн. наук, профессор

Метод решения систем линейных уравнений с использованием подходов теории управления

Довольно часто в некоторых практических задачах возникает надобность решения систем нелинейных уравнений, для которых не всегда есть возможность найти решения в явном виде, потому применяются разного рода численные методы, такие как: метод простой итерации, метод Ньютона (Ньютона-Рафсона), метод Зейделя и другие методы, а также их модификации [1].

Указанные методы имеют недостатки, такие как зацикливание, потеря значений, вырождение значений переменных, при попадании в точки бифуркации.

Поэтому актуальной задачей является создания нового метода, который был бы лишен указанных выше недостатков. Эта задача может быть решена использованием метода, который бы вел себя более адаптивно, корректируя себя на каждом шаге, что может быть реализовано при использовании подходов теории управления.

Рассмотрим систему уравнений в векторной форме:

$$F(X) = 0, X \in R^n . \qquad (1)$$

Вместо системы (1) будем рассматривать множество систем вида:

$$F(X) = U, X \in R^n , \qquad (2)$$

где $U \in R^n$ - произвольный вектор.

Очевидно, что при $U = 0$ уравнения (2) переходят в (1).

Сформулируем теперь задачу о решении системы (1) как последовательность решений систем (2), при U изменяющимся от некоторого U^0 до $U = 0$. Иными словами, U можно рассматривать как управление в пространстве переменных системы уравнений (2).

Продифференцируем (2) по некоторому параметру t . Пусть $t \in [0,1]$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \dot{X} = \dot{U} , \qquad (3)$$

где $\frac{\partial F}{\partial x} = W(x)$ - матрица Якоби.

Обозначая, $\Phi(x) = W^{-1}(x)$, и $\delta = \dot{U}$, вместо (3) можно записать:

$$\begin{cases} \dot{X} = \Phi(X)\delta, \\ \dot{U} = \delta. \end{cases} \qquad (4)$$

Если теперь рассматривать величину δ как управляющую переменную, то (4) представляет собой систему *2n* дифференциальных уравнений с управлением δ .

Пусть X^0 - некоторое произвольное приближение вектора решения (1). Ему соответствует значение $U = U^0$, вычисляемое в виде:

$$F(X^0) = U^0 \qquad (5)$$

Векторы X^0 и U^0 примем за начальные значения управляемого процесса при $t = 0$.

Будем искать закон управления $\delta(t), t \in [0,1]$ так, чтобы траектория системы (4) в момент $t = 1$ закончилась в точке $U(1) = 0$. Тогда, получившееся при этом значение $X(1)$ и будет искомым решением (1).

Простейшим алгоритмом для $\delta(t)$ является $\delta(t) = -U^0$.

Тогда $U(t) = U^0 - U^0 t$ в силу (4). То есть при $t = 1; U(1) = 0$.

Таким образом решение сводится к интегрированию первой подсистемы (4):

$$\dot{X} = -\Phi(X)U^0 \qquad (6)$$

при произвольных начальных условиях X^0. При этом U^0 находится из соотношения (5).

Решение дифференциального уравнения (6) в точке $t = 1$ совпадает с искомым решением исходной системы (1).

Для оптимизации вычислительного процесса существует ряд методов позволяющих ускорить процесс интегрирования (6) без прямого обращения матриц на каждом шаге [2].

Список литературы:

1. Вержбицкий В.М. Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения): Учеб. Пособие для вузов. – М.: Высш. Шк., 2000. – 266с

2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. – 832 с..