УДК 621.3

<u>Д.А. МАКСИМОВ</u>, Н.П. ПЕТРЕНКО,
О.Я. КОНОВАЛОВ, канд. техн. наук, доцент

О решениях задач продолжения поля с оси в элементарных функциях

Для определения профилей электродов или массивных соленоидов, обеспечивающих заданные распределения напряженностей поля на граничной поверхности, формулируют задачу продолжения поля – потенциала, силовой функции или магнитного потока, которая представляет собой задачу Коши для соответствующего уравнения эллиптического типа. Решения таких задач, полученные методом частных решений, непрерывно зависящих от параметра, содержат несобственные интегралы, область сходимости которых зависит от заданного распределения поля и ограничена в направлении нормали к граничной поверхности. Последнее приводит к некоторым затруднениям и погрешностям при нахождении контура профиля. С другой стороны, для оценки сходимости несобственных интегралов желательно знать интегральные преобразования Фурье заданных распределений поля, а число таких распределений ограничено. Поэтому представляет интерес поиск таких распределений поля даже на граничных поверхностях простой формы, для которых решения соответствующих задач продолжения поля могут быть представлены элементарными функциями.

Рассматриваем в декартовых координатах x, y плоскопараллельное поле над плоской граничной поверхностью $y = 0$, на которой задано распределение $H_x(x,0)$ (рис. 1, 2). Среда в области $y > 0$ имеет магнитную проницаемость μ и является непроводящей. Формулировка и решение задачи продолжения магнитного поля с оси x для силовой функции магнитного поля v_m имеет вид:

$$\frac{\partial^2 v_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} = 0; \qquad (1)$$

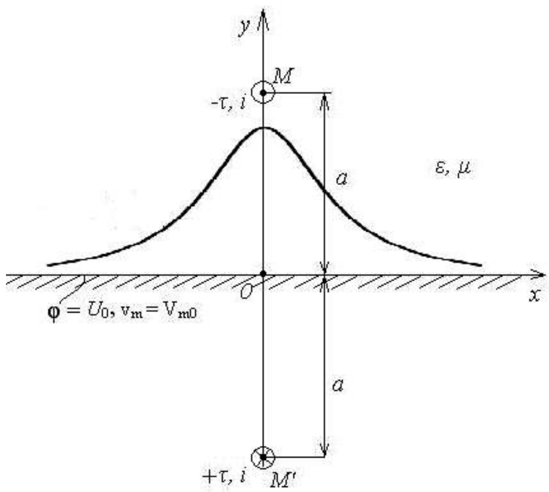
$$v_m(x,0) = V_{m0}; \qquad (2)$$

$$\left.\frac{\partial v_m}{\partial y}\right|_{y=0} = -H_x(x,0); \qquad (3)$$

$$v_m(x,y) = V_{m0} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [F(\lambda)/\lambda] \cos(\lambda x) sh(\lambda y) d\lambda, \qquad (4)$$

где V_{m0} – постоянная, $F(\lambda)$ – косинус-преобразование Фурье $H_x(x,0)$.

Физический смысл задачи (1) – (3): магнитное поле над осью x при идеальном поверхностном эффекте. В случае электростатики задано распределение $E_y(x,0)$. Формулировка и решение задачи для потенциала $\varphi(x,y)$ имеют аналогичный вид. При этом V_{m0} следует заменить на U_0, а $H_x(x,0)$ – на $E_y(x,0)$.



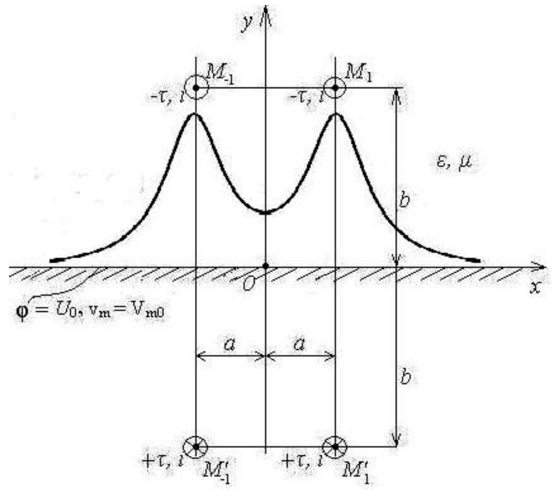


Рис. 1 – Распределение $H_x(x,0)$ или $E_y(x,0)$, создаваемое двумя линейными источниками на границе $y = 0$

Рис. 2 – Распределение $H_x(x,0)$ или $E_y(x,0)$, создаваемое двумя парами линейных источников на границе $y = 0$

Рассмотрим вначале функцию

$$v_m(x, y) = V_{m0} + \frac{1}{4}\ln\left[\frac{x^2 + (y-a)^2}{x^2 + (y+a)^2}\right], \tag{5}$$

где a – действительная постоянная, $a > 0$.

Подстановкой (5) можно убедиться, что эта функция удовлетворяет уравнению (1) и граничному условию (2). Дифференцируя (5) по y, получим

$$\left.\frac{\partial v_m}{\partial y}\right|_{y=0} = -\frac{a}{x^2 + a^2}. \tag{6}$$

Поскольку правая часть выражения (6) является аналитической функцией, то функция (5) является единственным решением задачи (1) – (3) при

$$H_x(x,0) = \frac{a}{x^2 + a^2}. \tag{7}$$

Пусть теперь

$$v_m(x, y) = V_{m0} + \frac{1}{4}\ln\frac{\left((x-a)^2 + (y-b)^2\right)\left((x+a)^2 + (y-b)^2\right)}{\left((x-a)^2 + (y+b)^2\right)\left((x+a)^2 + (y+b)^2\right)}, \tag{8}$$

Выражение (8) является единственным решением задачи (1) – (3) при

$$H_x(x,0) = b\left[\frac{1}{(x-a)^2 + b^2} + \frac{1}{(x+a)^2 + b^2}\right]. \tag{9}$$

Решения аналогичных электростатических задач отличаются от (5), (8) тем же, что и соответствующие решения с несобственными интегралами.

Решение (5) и распределение (7) соответствуют магнитному полю двух параллельных осей с токами i противоположного направления, а решение (8) и распределение (9) – двум парам подобных источников поля, расположенным симметрично осям y и x в точках M_1, M'_1, M_{-1}, M'_{-1} (рис. 2). Все величины, входящие в выражения (1) – (9), полагаются безразмерными.