

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ МІКРОЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ НА ОСНОВІ ВИКОРИСТАННЯ КВАЗІФУНКЦІЇ ГРІНА-РВАЧОВА

Кончаковська О. С.

Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків

У роботі розглядається нелінійна крайова задача

$$-\Delta u = \frac{\lambda f(\mathbf{x})}{(1-u)^2} + P(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (2)$$

де Ω – плоска область з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$ ($\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$); $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$;

Δ – оператор Лапласа.

Задача (1), (2) є математичною моделлю найпростішої мікроелектромеханічної системи з пружною мембраною, на яку діє зовнішній тиск і електростатична сила. Величину $P(\mathbf{x})$ можна розглядати як зміну тиску, а величину λ – як зміну прикладеної напруги ($f(\mathbf{x})$ – розподіл напруги у області Ω).

До розв'язання задачі (1), (2) застосовано метод двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова [2]. У конусі K_+ невід'ємних функцій простору $C(\bar{\Omega})$ задача (1), (2) еквівалентна інтегральному рівнянню Урисона

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \left\{ K(\mathbf{x}, \mathbf{s})u(\mathbf{s}) + Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[\frac{\lambda f(\mathbf{s})}{(1-u(\mathbf{s}))^2} + P(\mathbf{s}) \right] \right\} d\mathbf{s}, \quad (3)$$

$$\text{де } K(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial^2}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial s_2^2} \right) \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}}, \quad Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{1 + \frac{4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}{r^2}} -$$

квазіфункція Гріна-Рвачова, $r = |\mathbf{x} - \mathbf{s}| = \sqrt{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2}$, а побудована за допомогою методу R -функцій елементарна функція $\omega(\mathbf{x})$ описує геометрію області Ω .

Рівняння (3) розглядається як рівняння з гетеротонним оператором. Якщо цей оператор має сильно інваріантний конусний відрізок, то, взявши за початкові наближення кінці цього відрізка, можна побудувати двобічний ітераційний процес знаходження наближеного розв'язку задачі (1), (2).

Роботу запропонованого методу двобічних наближень розв'язання задачі (1), (2) продемонстровано на тестових прикладах задач з різними функціями $f(\mathbf{x})$ та у різних областях Ω .

Література:

1. Beckham J. R., Pelesko J. A. An electrostatic–elastic membrane system with an external pressure // Mathematical and Computer Modelling. 2011. Vol. 54, № 11-12. Pp. 2686-2708.
2. Sidorov M. V. Method of two-sided approximations for finding positive solutions of boundary value problems for semilinear elliptic systems: the use of the Green-Rvachev's quasi-function // Journal of Numerical & Applied Mathematics. 2018. № 2 (128). P. 96-113.