ЗНАХОДЖЕННЯ ДОДАТНОГО АКІАЛЬНО-СИМЕТРИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЕЛІПТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ МЕТОДОМ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ

Пархоменко В. Г., Сидоров М. В.

Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків

У роботі розглядається перша крайова задача для нелінійного еліптичного рівняння:

$$-\Delta u = f(\boldsymbol{x}, u), \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

де Ω – обмежена область з $\mathbb{R}^2$; $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$; Δ – оператор Лапласа; функція $f(\boldsymbol{x}, u)$ неперервна і додатна при $\boldsymbol{x} \in \bar{\Omega}$, $u > 0$.

Задача (1), (2) виникає, наприклад, при математичному моделюванні процесів нелінійної теплопровідності.

Якщо область Ω є кругом радіуса R, то постає задача знаходження аксіально-симетричного розв'язку рівняння. Цей розв'язок залежить тільки від $\rho = |\boldsymbol{x}|$. Шляхом переходу до полярних координат рівняння (1) зводиться до звичайного диференціального рівняння:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{du}{d\rho}\right) = f(\rho, u), \tag{3}$$

а крайова умова (2), задана на колі $|\boldsymbol{x}| = R$, зводиться до вигляду

$$u(R) = 0.$$

Точка $\rho = 0$ є особливою точкою диференціального рівняння (3), отже, для функції $u = u(\rho)$ необхідно задати умову обмеженості:

$$|u(0)| < +\infty.$$

Тоді крайова задача (1), (2) зводиться до крайової задачі:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{du}{d\rho}\right) = f(\rho, u), \rho \in (0, R), \tag{4}$$

$$|u(0)| < +\infty, u(R) = 0. \tag{5}$$

Задача (4), (5) еквіваолентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна. Для його розв'язання будуються послідовності верхніх і нижніх наближень, перша з них є незростаючою, а друга – неспадаючою [1].

Метод двобічних наближень розв'язання задачі (4), (5) застосовано для випадку степенової нелінійності $f(\rho, u) = u^p$.

Література:

1. Пархоменко В. Г., Сидоров М.В. Застосування методу двобічних наближень до знаходження додатних аксіально-симетричних розв'язків крайових задач з монотонними нелінійностями. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*. 2024. Вип. 25. С. 121–133.