ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ ТЕРМОХІМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ МЕТОДОМ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ НА ОСНОВІ ВИКОРИСТАННЯ КВАЗІФУНКЦІЇ ГРІНА-РВАЧОВА

Янбеков Р. Я.
Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків

Задача математичного моделювання термохімічних процесів у багатьох практично цікавих випадках зводиться до задачі знаходження додатного розв'язку наступної крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння:

$$-Lu = f(\boldsymbol{x}, u), \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

де $Lu = \Delta u$ або $Lu = \Delta u \mp \kappa^2 u$, $\kappa > 0$, – еліптичний оператор, Ω – обмежена область з $\mathbb{R}^2$ або $\mathbb{R}^3$, у якій відбувається термохімічний процес, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ або $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\partial\Omega$ – межа області Ω, $f(\boldsymbol{x}, u)$ – функція, що відповідає нелінійним джерелам тепловиділення, джерелам речовини при дифузії тощо.

За допомогою методу квазіфункцій Гріна-Рвачова [1] від крайової задачі (1), (2) можна перейти до еквівалентного інтегрального рівняння Урисона. Узагальненим розв'язком u^* задачі (1), (2) вважатимемо невід'ємну функцію з простору $C(\bar{\Omega})$, що є розв'язком зазначеного інтегрального рівняння. Інтегральне рівняння Урисона розглядатимемо у просторі $C(\bar{\Omega})$, що напівупорядковано конусом невід'ємних неперервних функцій, як нелінійне операторне рівняння $u = T(u)$ з гетеротонним оператором T, для якого існує супровідний оператор $\hat{T}(v, w)$: $T(u) = \hat{T}(u, u)$. Якщо оператор T має сильно інваріантний конусний відрізок $< v_0, w_0 >$ ($\hat{T}(v_0, w_0) \geq v_0, \hat{T}(w_0, v_0) \leq w_0$), то ітераційний процес

$$v^{(k+1)} = \hat{T}(v^{(k)}, w^{(k)}), w^{(k+1)} = \hat{T}(w^{(k)}, v^{(k)}), k = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$v^{(0)} = v_0, w^{(0)} = w_0,$$

двобічно збігається (за певних умов) до узагальненого розв'язку задачі (1), (2):

$$v_0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq v^{(2)} \leq \ldots \leq u^* \leq \ldots \leq w^{(2)} \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w_0.$$

Критерій закінчення ітераційного процесу має вигляд $\max_{\boldsymbol{x} \in \bar{\Omega}}(w^{(k)}(\boldsymbol{x}) - v^{(k)}(\boldsymbol{x})) \leq 2\varepsilon$ і тоді з точністю ε маємо, що $u^* \approx \frac{w^{(k)} + v^{(k)}}{2}$.

Роботу запропонованого методу продемонстровано на тестовому прикладі задачі (1), (2) з експоненціальною нелінійністю в $\bar{\Omega} = \{(x_1, x_2): 0 \leq x_1, x_2 \leq 1\}$.

Література:

1. Sidorov M. V. Green-Rvachev's quasi-function method for constructing two-sided approximations to positive solution of nonlinear boundary value problems. *Carpathian Mathematical Publications*. 2018. Т. 10, № 2. С. 360-375.