МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

ДОРОФЄЄВ ЮРІЙ ІВАНОВИЧ

УДК 681.5.013

РОБАСТНЕ КЕРУВАННЯ ЗАПАСАМИ У МЕРЕЖАХ ПОСТАВОК В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ПОПИТУ ТА ТРАНСПОРТНИХ ЗАПІЗНЕНЬ

Спеціальність 05.13.07 – автоматизація процесів керування

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

Харків – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі системного аналізу і управління Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» Міністерства освіти і науки України.

Науковий консультант	доктор технічних наук, професор **Любчик Леонід Михайлович,** Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», завідувач кафедри комп'ютерної математики і математичного моделювання
Офіційні опоненти:	доктор технічних наук, професор **Кулік Анатолій Степанович,** Національний аерокосмічний університет імені М.Є. Жуковського «ХАІ», м. Харків, завідувач кафедри систем управління літальних апаратів
	доктор технічних наук, професор **Михальов Олександр Ілліч,** Національна металургійна академія України, м. Дніпропетровськ, завідувач кафедри інформаційних технологій і систем
	доктор технічних наук, професор **Кузнєцов Борис Іванович,** Інститут технічних проблем магнетизму НАН України, м. Харків, завідувач відділу проблем управління магнітним полем

Захист відбудеться «7» липня 2016 року о 13:00 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.050.07 в Національному технічному університеті «Харківський політехнічний інститут» за адресою:
61002, м. Харків, вул. Фрунзе, 21.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» за адресою:
61002, м. Харків, вул. Фрунзе, 21.

Автореферат розісланий «___» червня 2016 року.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Северин В. П.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Серед сучасних проблем автоматизації керування складними техніко-економічними системами особливо місце займають проблеми керування мережами поставок, а саме сукупністю взаємопов'язаних об'єктів, які здійснюють видобуток сировини, виробництво, зберігання, транспортування і розподіл матеріальних ресурсів, напівфабрикатів та готової продукції з метою задоволення споживчого попиту і отримання прибутку. Прикладами є виробничі та транспортні системи, системи розподілу ресурсів, зокрема гідроресурсів, і т.п. Існують різні типи топології подібних систем, які визначаються взаємним розміщенням виробничих вузлів, складів і споживачів. Найбільшого поширення у теперішній час набули системи з багаторівневою структурою, яка характерна для дилерських мереж, мережевих рітейлерів, транснаціональних компаній і технологічно складних виробництв. У мережах поставок кожен вузол в реальному часі приймає замовлення на поставку ресурсів від вузлів мережі, які є споживачами його продукції, а також від зовнішніх споживачів, і формує замовлення вузлам, які є для нього постачальниками ресурсів.

Необхідною складовою виробничої і комерційної діяльності підприємств є керування запасами матеріальних ресурсів, оскільки запаси являють собою один з найважливіших чинників забезпечення безперервності процесів матеріального відтворення в умовах змінного впливу зовнішнього середовища. Нестача виробничих запасів спричиняє порушення ритмічності виробництва, зниження продуктивності праці, перевитрату матеріально-технічних ресурсів через вимушені нераціональні заміни і, як наслідок, підвищення собівартості продукції, а наявність невикористовуваних запасів збільшує витрати на їх утримання.

Керування запасами полягає у визначенні розмірів замовлень на їх поповнення і моментів часу формування замовлень. Функціонування систем керування мережами поставок здійснюється в умовах суттєвої невизначеності як відносно структури та параметрів мережі, зокрема інтервалів транспортних запізнень, так і впливу зовнішніх чинників, в першу чергу попиту, що є підставою для використання сучасних методів робастного керування. Таким чином, визначення оптимальних рівнів страхових запасів у вузлах мережі поставок, які розглядаються в якості завдаючих впливів відповідних багатовимірних регуляторів, і розробка методів синтезу робастного керування запасами в складних мережах поставок в умовах невизначеності попиту та транспортних запізнень є актуальною науковою та практичною проблемою і визначає напрям досліджень дисертаційної роботи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана на кафедрі системного аналізу і управління Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» у відповідності до плану науково-дослідних робіт МОН України в рамках держбюджетних тем «Розвиток теорії та методів синтезу децентралізованого робастного керування розподіленими мережами поставок в умовах невизначеності» (№ ДР 0111U002285), де здобувач був відповідальним виконавцем, та «Розробка інформаційної технології формування портфелів проектів національного рівня на основі імітаційної моделі науково-технологічного розвитку України» (№ ДР 0115U000543), де здобувач був виконавцем окремих етапів.

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є розробка і обґрунтування концепції та методів синтезу автоматизованих систем робастного керування запасами в мережах поставок, які формують обсяги замовлень обмежених ресурсів в залежності від рівнів їх запасів у вузлах мереж та забезпечують утримання заданих рівнів запасів в умовах суттєво обмеженої інформації щодо транспортних запізнень та обсягів зовнішнього попиту.

Для досягнення наміченої мети поставлені задачі:

1. Провести аналіз методів математичного моделювання керованих мереж поставок та методів керування запасами в мережах поставок.

2. Розробити математичну модель процесу керування запасами в мережі поставок з урахуванням невизначеності інтервалів транспортних запізнень та обсягів зовнішнього попиту.

3. Розробити та обґрунтувати концепцію та методи синтезу обмеженого робастного гарантуючого керування запасами в мережах поставок.

4. Розробити метод синтезу децентралізованого робастного керування запасами в мережах поставок та провести аналіз робастної стійкості синтезованої системи керування.

5. Встановити умови існування розв’язку задачі синтезу обмеженого робастного гарантуючого керування запасами в мережах поставок.

6. Провести дослідження ефективності розроблених систем робастного керування запасами методами математичного та комп’ютерного моделювання.

7. Розробити математичну модель системи подачі та розподілу води з урахуванням її нелінійності та вирішити задачу синтезу автоматизованого керування режимами роботи насосних станцій в мережі централізованого водопостачання населеного пункту.

Об’єктом дослідження є процеси автоматизованого керування запасами в мережах поставок в умовах невизначеності.

Предмет дослідження складають моделі та методи синтезу робастних систем автоматизованого керування запасами в мережах поставок.

Методи дослідження. Теоретичною базою виконаних досліджень є фундаментальні положення теорії автоматичного керування та теорії математичного моделювання. Методи теорії керування у просторі станів, методи лінійної алгебри та теорії різницевих рівнянь застосовано при розробці математичних моделей для процесів керування запасами в мережах поставок. Методи сучасної теорії керування, зокрема, теорії робастного та оптимального керування, методи теорії матриць, другий (прямий) метод Ляпунова, метод оптимального керування лінійними об’єктами за квадратичним критерієм якості, метод інваріантних еліпсоїдів та метод синтезу регуляторів, заснований на застосуванні апарату лінійних матричних нерівностей, використано при розробці методів синтезу обмеженого робастного керування запасами в мережах поставок. Метод векторних функцій Ляпунова та метод порівняння застосовано для аналізу стійкості децентралізованої системи керування запасами. Методи теорії обчислень та теорії математичного програмування використані для визначення параметрів систем керування запасами та дослідження ефективності методів синтезу.

Наукова новизна одержаних результатів. Основний науковий результат роботи полягає в вирішенні важливої науково-практичної проблеми розробки та обґрунтування концепції та методів обмеженого робастного гарантуючого керування запасами в мережах поставок, що базуються на розвитку методу інваріантних еліпсоїдів на основі застосування дескрипторного підходу та параметризованої функції Ляпунова.

Вперше:

– розроблено математичні моделі процесів керування запасами в мережі поставок з параметричною невизначеністю афінного типу, що дозволяє врахувати невизначеність інтервалів транспортних запізнень для централізованої та децентралізованої структури системи керування;

– вирішена задача синтезу робастного гарантуючого керування запасами в мережах поставок на основі розвитку методу інваріантних еліпсоїдів із застосуванням дескрипторного підходу та параметризованої функції Ляпунова, що забезпечує можливість стабілізації рівнів запасів в умовах невизначеності;

– розроблено метод визначення необхідних ресурсів керування у вигляді потрібної області в просторі керуючих впливів шляхом розв’язання системи білінійних матричних нерівностей, що дозволяє визначити умови існування розв’язку задачі робастного керування запасами при наявності несиметричних обмежень на значення керуючих впливів;

– розроблено метод визначення вагових матриць квадратичного показника якості керування шляхом розв’язання системи білінійних матричних нерівностей, що дозволяє забезпечити максимально можливу точність стабілізації страхових рівнів запасів у вузлах мережі;

– розроблено математичну модель системи подачі та розподілу води як об’єкта автоматичного керування, яка відрізняється урахуванням нелінійних взаємозв’язків за умови існування квадратичних обмежень на їх значення, що дозволяє використовувати сучасні методи керування для автоматизації процесів розподілу води в населених пунктах;

– вирішена задача автоматизованого керування режимами роботи насосних станцій в системі подачі та розподілу води, що дозволяє знизити витрати на електроенергію і підвищити надійність забезпечення споживачів водою.

Отримали подальший розвиток:

– метод субоптимального структурного та параметричного синтезу обмеженого робастного гарантуючого керування запасами у мережах поставок шляхом розвитку методу інваріантних еліпсоїдів із використанням дескрипторного підходу та параметризованої функції Ляпунова, що дозволяє зменшити ступінь консерватизму результатів керування;

– метод аналізу робастної стійкості децентралізованої системи керування запасами в мережах поставок на основі застосування методу векторних функцій Ляпунова та методу порівняння, що дозволяє встановити умови стійкості децентралізованої системи керування запасами.

Практичне значення одержаних результатів. Розроблені та програмно реалізовані моделі та алгоритми робастного гарантуючого керування запасами в мережах поставок в умовах невизначеності та технологічних обмежень знайшли практичне застосування при створенні систем автоматизованого керування мережами поставок, які забезпечують зниження витрат, пов'язаних з транспортуванням та зберіганням матеріальних ресурсів.

Результати дисертаційної роботи впроваджено на промислових підприємствах і організаціях, які займаються виробництвом, зберіганням і розподілом матеріальних ресурсів, зокрема КП «Харківводоканал» (м. Харків) – одному з найбільших в Україні підприємств з надання послуг водопостачання та ТзОВ фірмі «СВ» (м. Харків) – провідному виробнику засобів побутової хімії в Україні.

Матеріали дисертації використовуються в лекційних курсах з дисциплін «Теорія керування» та «Конфліктно-керовані системи» на кафедрі системного аналізу і управління НТУ «ХПІ».

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертації, які виносяться на захист, отримані здобувачем особисто, а саме: математичні моделі процесів керування запасами в мережах поставок в умовах невизначеності та з урахуванням обмежень; метод синтезу робастного гарантуючого керування запасами в мережах поставок на основі розвитку методу інваріантних еліпсоїдів із застосуванням дескрипторного підходу та параметризованої функції Ляпунова; метод визначення мінімально допустимих обсягів заказу ресурсів та метод визначення вагових матриць квадратичного показника якості керування; метод аналізу робастної стійкості децентралізованої системи керування запасами в мережах поставок на основі застосування методу векторних функцій Ляпунова та методу порівняння; результати синтезу системи автоматизованого керування режимами роботи насосних станцій в системі подачі та розподілу води.

Апробація результатів дисертації. Основні результати роботи доповідались та обговорювались на: XVII – XXII Міжнародних конференціях з автоматичного управління «Автоматика» (м. Харків, 2010; м. Львів, 2011; м. Київ, 2012; м. Миколаїв, 2013; м. Київ, 2014; м. Одеса, 2015); V Міжнародній науковій конференції «Проектування інженерних і наукових додатків у середовищі MATLAB» (м. Харків, 2011); II Всеукраїнській науково-практичній конференції «Інформатика та системні науки ІСН-2011» (м. Полтава, 2011); XIII, XIV, XVI Міжнародних науково-технічних конференціях «Системний аналіз та інформаційні технології САІТ» (м. Київ, 2011, 2012, 2014); XXV Міжнародній науковій конференції «Математичні методи в техніці та технологіях ММТТ-25» (м. Харків, 2012); Міжнародній конференції IFAC «Manufacturing Modelling, Management and Control MIM'2013» (м. Санкт-Петербург, 2013).

Публікації. Результати дисертації опубліковані в 34 наукових працях, з них: 19 статей у наукових фахових виданнях України (16 – у виданнях, включених до міжнародних наукометричних баз), 2 – в іноземних періодичних фахових виданнях (1 – SCOPUS), 13 – у матеріалах конференцій (1 – SCOPUS).

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з вступу, 7 розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку. Повний обсяг дисертації складає 284 сторінки і містить 69 рисунків та 5 таблиць по тексту, 7 рисунків на 7 окремих сторінках, 187 найменувань використаних джерел на 20 сторінках, 1 додаток на 4 сторінках.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтована актуальність теми дисертаційної роботи, сформульовані мета та задачі дослідження, викладені наукова новизна і практична цінність отриманих результатів, особистий внесок здобувача в розробку теми дисертаційної роботи. Наведені дані про впровадження результатів дисертаційних досліджень, їх апробацію та публікації.

Перший розділ містить огляд задач і методів керування мережами поставок в умовах невизначеності, обгрунтування напрямку досліджень.

Проаналізовано динамічні мережі поставок, особливістю яких є залежність рівнів запасу ресурсів в кожному періоді від рішень щодо поставок, прийнятих у попередніх періодах. Аналіз різних підходів до керування запасами приведений в роботах В. А. Лотоцького і А. С. Манделя, Ю. І. Рижикова, А. Н. Стерлігової, В. В. Лукінського, J. Bukan і E. Kenigsberg та інших вчених. Серед моделей керування запасами виділяються два основних типи: модель критичних рівнів і модель періодичної перевірки. У першому випадку передбачено безперервний контроль за станом запасів і розміщення замовлень фіксованого розміру при зниженні поточних запасів до деяких критичних рівнів. Другий тип моделі припускає перевірку рівня запасів через рівні проміжки часу і розміщення замовлень, розмір яких визначається відповідно до обраної стратегії. Для дослідження обрано модель періодичної перевірки, яка відповідає мережам поставок, де передбачений періодичний контроль стану ресурсів.

Відзначено, що побудова моделей мереж поставок базується на використанні поняття потоку, а саме діяльності, яка в одиницю часу споживає деякі обсяги ресурсів, можливо переробляючи їх, і поставляє певний обсяг продукції споживачам. Всі потоки поділяються на дві категорії: керовані потоки описують процеси переробки і перерозподілу ресурсів між вузлами і процеси поставок сировини ззовні; некеровані – попит на ресурси, що формується зовнішніми споживачами. Модель мережі поставок представляється у вигляді орієнтованого графа, вершини якого відповідають вузлам мережі та визначають види і обсяги керованих запасів, а дуги представляють керовані та некеровані потоки.

Вибір стратегії керування запасами визначається характером зовнішнього попиту, який доцільно розглядати в якості зовнішніх збурюючих впливів. На практиці часто немає підстав для того, щоб описувати попит за допомогою деякої типової моделі, наприклад, випадкових збурень, гармонійних коливань, або таких, що зменшуються з плином часу, оскільки будь-яка інформація, окрім тієї, що зовнішній попит є обмеженим, відсутня. Тому в умовах невизначеності попиту використовується концепція «невідомих, але обмежених» впливів, при цьому відповідна модель попиту характеризується інтервальною невизначеністю. Іншим джерелом невизначеності є наявність транспортних запізнень. Передбачається, що номінальні значення тривалості транспортування і переробки ресурсів у вузлах мережі відомі. Однак, в процесі функціонування ці параметри можуть відрізнятися від своїх номінальних значень. В результаті виникає необхідність забезпечення робастності системи керування запасами щодо варіацій зазначених параметрів.

Особливістю задачі керування запасами є також необхідність врахування обмежень. У теорії керування традиційно вводяться обмеження на вектори змінних задачі, задані в певній нормі. Однак, для задач керування запасами характерною є вимога невід'ємності значень змінних, що призводить до необхідності врахування несиметричних обмежень на обсяги сховищ і розміри заказів.

Більшість процедур, розроблених для аналізу та синтезу систем керування запасами в останні десятиліття, використовують централізований підхід, коли вся інформація про поточний стан системи передається на єдиний регулятор, який формує керуючі впливи для всіх вузлів. Проте, більш перспективним є децентралізований підхід, при якому загальна оптимізаційна задача замінюється набором локальних задач меншої розмірності, що вирішуються паралельно та незалежно. Однак, при цьому виникає необхідність забезпечення робастної стійкості системи з урахуванням взаємозв'язків та обмежень в умовах функціональної невизначеності.

Другий розділ присвячений аналізу методів математичного моделювання мереж поставок в умовах невизначеності та побудові математичної моделі процесу керування запасами в мережі поставок у вигляді дискретної динамічної системи у просторі станів. Дискретність виникає внаслідок того, що контроль рівнів запасів, а також формування керуючих дій відбуваються через деякі проміжки часу, які визначаються обраним періодом дискретизації.

Рівняння моделі описують зміни рівнів запасів кожного виду ресурсів з часом. В якості змінних станів розглядаються готівкові рівні запасів окремих вузлів. Керуючими діями є розміри замовлень на поставку ресурсів, що формуються вузлами мережі в поточному періоді. Розміри попиту на ресурси, що надходять із зовнішнього середовища, виступають в якості зовнішніх збурень.

Передбачається, що структура мережі та номінальні значення інтервалів транспортних запізнень є відомими, а рівні запасів є доступними для безпосереднього вимірювання. Тоді математична модель процесу керування запасами в мережі поставок, яка складається з n однопродуктових вузлів, задається різницевим рівнянням з запізненням

$$x(k+1) = x(k) + \sum_{t=0}^{\Lambda} B_t u(k-t) + Ed(k), \tag{1}$$

де $k = 0, 1, \ldots$ – номер дискретного інтервалу; $x(k) \in \mathrm{R}^n$ – вектор станів мережі; $u(k) \in \mathrm{R}^m$ – вектор керуючих дій; $d(k) \in \mathrm{R}^q$ – вектор зовнішніх збурень; Λ – максимальне значення інтервалів транспортних запізнень в мережі; $B_t \in \mathrm{R}^{n \times m}$, $t = \overline{0, \Lambda}$, $E \in \mathrm{R}^{n \times q}$ – матриці впливу керуючих дій та збурень, відповідно.

Для кожного вузла задаються максимальні рівні запасу ресурсів та розміру замовлень. Тоді в кожний момент часу $k \geq 0$ повинні виконуватися обмеження:

$$x(k) \in X = \{x \in \mathrm{R}^n : 0 \leq x \leq x^{\max}\}, \quad u(k) \in U = \{u \in \mathrm{R}^m : 0 \leq u \leq u^{\max}\}. \tag{2}$$

Для моделювання невизначеності зовнішнього попиту використано набір інтервалів, у межах яких елементи векторної функції $d(k)$, яка описує попит, приймають значення довільним чином. Отже, зовнішні збурення задовольняють обмеженням $d(k)\in D=\{d\in \mathrm{R}^q:\ 0\le d^{\min}\le d\le d^{\max}\}$, де вектори $d^{\min}$ і $d^{\max}$, що визначають граничні значення попиту, є відомими. Вектори $x(k)\in X$, $u(k)\in U$ і $d(k)\in D$, а також опуклі множини X, U і D називаються допустимими.

Для перетворення моделі (1) до стандартного виду без запізнення виконується розширення простору станів шляхом включення до вектору станів векторів, які визначають розміри раніше замовлених ресурсів, що знаходяться в процесі транспортування. Тоді вектор станів і рівняння розширеної моделі матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}&\xi(k)=\left[x^{\mathrm{T}}(k),\ u^{\mathrm{T}}(k-1),\ u^{\mathrm{T}}(k-2),\ ...,\ u^{\mathrm{T}}(k-\Lambda)\right]^{\mathrm{T}},\\&\xi(k+1)=A\xi(k)+Bu(k)+Gd(k),\quad x(k)=C\xi(k),\end{aligned}\tag{3}$$

де $\xi(k)\in \mathrm{R}^N$, $N=n+m\Lambda$, матриці $A\in \mathrm{R}^{N\times N}$, $B\in \mathrm{R}^{N\times m}$, $G\in \mathrm{R}^{N\times q}$, $C\in \mathrm{R}^{n\times N}$ мають відповідну блокову структуру.

У випадку, коли інтервали транспортних запізнень відрізняються від номінальних значень, матриця динаміки A моделі (3) стає параметрично невизначеною і в кожен момент часу приймає будь-яке значення з множини:

$$A(\theta)\in\Omega=\left\{A\in \mathrm{R}^{N\times N}:A=\sum_{i=1}^{L}\theta_i(k)A^{(i)}\right\},\quad \theta(k)\in\Theta=\left\{\theta\in \mathrm{R}^L:\ \theta_i(k)\ge 0,\ \sum_{i=1}^{L}\theta_i(k)=1\right\},\tag{4}$$

де $L=2^r$; r – кількість вузлів мережі, інтервали запізнення яких можуть варіюватися; $\theta_i(k)$, $i=\overline{1,L}$ – набір параметрів, які описують невизначеність моделі; $A^{(i)}$, $i=\overline{1,L}$ – вершини опуклої множини Ω. В кожен момент часу матриця $A(\theta)$ приймає будь-яке значення з можливих варіантів її реалізації, отже, тільки одне з чисел $\theta_i(k)$ приймає значення 1, а інші дорівнюють 0, причому послідовність зміни значень невідома. Таким чином, розширена модель мережі поставок в умовах невизначеності інтервалів транспортних запізнень описується моделлю з параметричною невизначеністю афінного типу:

$$\xi(k+1)=A(\theta)\xi(k)+Bu(k)+Gd(k),\ x(k)=C\xi(k),\ A(\theta)\in\Omega=\mathrm{Conv}\{A^{(1)},...,A^{(L)}\},\tag{5}$$

де $\mathrm{Conv}\{\cdot\}$ – опукла оболонка.

Критерій якості у разі нескінченного часового горизонту має вигляд

$$J_\infty(k)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\xi(k)-\xi^*\right)^{\mathrm{T}}W_\xi\left(\xi(k)-\xi^*\right)+u^{\mathrm{T}}(k)W_u u(k)\right),\tag{6}$$

де $W_\xi\in \mathrm{R}^{N\times N}$, $W_u\in \mathrm{R}^{m\times m}$ – додатно визначені діагональні вагові матриці; $\xi^*=[x^{*\mathrm{T}},...,x^{*\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ – вектор, який складається з $\Lambda+1$ векторів x^*, компоненти якого визначають розміри страхових запасів ресурсів у вузлах мережі та обчислюються за допомогою продуктивної моделі Леонтьєва на підставі верхніх граничних значень зовнішнього попиту з урахуванням запізнень:

$$x^*=(I_n-\Pi)^{-1}\hat{d},\quad \hat{d}_i=\begin{cases}\Lambda_i d_i^{\max},\ i=\overline{1,q},\\0,\quad i=\overline{q+1,n},\end{cases}\tag{7}$$

де I_n – одинична матриця розмірності n; $\Pi \in \mathrm{R}^{n \times n}$ – продуктивна матриця, значення елементу $[\Pi]_{ij}$ якої дорівнює кількості одиниць ресурсу i, які потрібні для виробництва одиниці ресурсу j.

Для системи (5) з параметричною невизначеністю (4) здійснена постановка задачі синтезу робастного керування запасами, яке для будь-якого допустимого попиту $d(k) \in D\ \ \forall k \geq 0$ і $\forall A(\theta) \in \Omega$ забезпечує:

1) повне і своєчасне задоволення попиту, тобто виконання першого з обмежень (2) на значення станів;

2) робастну стійкість замкнутої системи при виконанні другого з обмежень (2) на значення керуючих дій;

3) гарантовану вартість керування, яка означає, що значення критерію якості (6) не перевищує деякого граничного значення.

В якості додаткової умови висувається вимога зниження ступеня впливу змін вектора невизначених параметрів $\theta(k)$ на результат синтезу керування.

Третій розділ присвячений розв’язанню проблеми синтезу робастного керування запасами в мережах поставок на основі методу прогнозуючого керування.

Послідовність керуючих впливів обчислюється в кожен дискретний момент часу в результаті розв’язання оптимізаційної задачі так, щоб мінімізувати показник якості впродовж деякого горизонту прогнозування за умови, що в якості початкових умов розглядається поточний стан системи. При цьому тільки перший елемент знайденої послідовності використовується в якості керування в поточний момент часу. У подальшому вимірюється нове значення вектору станів і процедура повторюється, тобто реалізується принцип відступаючого горизонту. Використання вимірювань реального стану об’єкта в кожен момент часу дозволяє компенсувати зовнішні збурення і невизначеність параметрів моделі. За наявності обмежень (2) знайти загальне рішення оптимізаційної задачі в аналітичному вигляді неможливо. Задача синтезу регулятора зведена до задачі квадратичного програмування, яка вирішується чисельно в реальному часі. Також здійснено постановку і розв’язання задачі синтезу прогнозуючого керування запасами в мережах поставок з «м’якими» обмеженнями, які дозволяють враховувати відкладений попит, а також перевищення готівковими рівнями запасу ресурсів у вузлах мережі розмірів відповідних сховищ.

Четвертий розділ присвячений розв’язанню проблеми синтезу робастного керування запасами в мережах поставок на основі методу інваріантних еліпсоїдів із застосуванням централізованого підходу, що передбачає наявність єдиного регулятора, на який надходить інформація про поточний стан мережі. Цей регулятор формує керуючі дії для всіх вузлів мережі.

Традиційним засобом забезпечення надійного функціонування мережі поставок за умов невизначеності попиту є створення страхових запасів. Закон керування побудовано у вигляді лінійного динамічного зворотного зв’язку за сигналом нев’язки між готівковими і страховими рівнями запасу ресурсів

$$u(k) = K(k)\left(\xi(k) - \xi^*\right), \tag{8}$$

де $K(k)\in \mathrm{R}^{m\times N}$ – нестаціонарна матриця коефіцієнтів зворотного зв’язку. Розширена модель замкнутої системи для керування (8) має вигляд:

$$\begin{aligned}&\xi(k+1)=A_f(\theta,k)\left(\xi(k)-\xi^*\right)+A(\theta)\xi^*+G\left(d(k)-d^*\right)+Gd^*,\\&x(k)=C\xi(k),\quad A_f(\theta,k)=A(\theta)+BK(k),\quad A(\theta)\in\Omega.\end{aligned}\tag{9}$$

Для вирішення задачі синтезу керування використано другий метод Ляпунова. Безпосередня перевірка робастної стійкості замкнутої системи (9) є нетривіальною задачею. Тому застосовано підхід, заснований на достатніх умовах робастної стійкості, який полягає в побудові функції Ляпунова для системи (9).

Визначено модифіковану квадратичну параметризовану функцію Ляпунова (ФЛ), яка побудована на рішеннях невизначеної системи (9):

$$V\left(\xi(k)-\xi^*\right)=\left(\xi(k)-\xi^*\right)^{\mathrm{T}}P(\theta,k)\left(\xi(k)-\xi^*\right),\quad P(\theta,k)=P^{\mathrm{T}}(\theta,k)\succ 0,\tag{10}$$

де $P(\theta,k)\in\mathrm{R}^{N\times N}$ – нестаціонарна симетрична матриця, яка залежить від вектора $\theta(k)$ невизначених параметрів моделі; позначення $M\succ 0\,(M\succeq 0)$ визначає додатно визначену (напіввизначену) матрицю M.

Дискретна система (9) з параметричною невизначеністю (4) є робастно стійкою, якщо для неї побудована функція Ляпунова (10), яка має властивості:

1) $V\left(\xi(k)-\xi^*\right)\ge 0\ \ \forall\xi(k)$, причому $V\left(\xi(k)-\xi^*\right)=0$ лише для $\xi(k)-\xi^*=0$;

2) $V\left(\xi(k+1)-\xi^*\right)<V\left(\xi(k)-\xi^*\right)\ \ \forall k\ge 0$, де $\xi(k)\ne 0$ – рішення системи (9).

Для функції (10) перша властивість очевидно виконана. Отже, керування (8) повинно забезпечити виконання другої властивості.

Необхідною і достатньою умовою скінченності значення функціоналу (6) є виконання умови робастної стійкості замкнутої системи (9). Для вирішення задачі відшукання керування (8), що мінімізує критерій якості (6), застосовано метод інваріантних еліпсоїдів. Еліпсоїд, що описується рівнянням

$$E(\xi^*,Q(k))=\{\xi\in\mathrm{R}^N:\ \left(\xi(k)-\xi^*\right)^{\mathrm{T}}Q^{-1}(k)\left(\xi(k)-\xi^*\right)\le 1\},\tag{11}$$

де $Q(k)\in\mathrm{R}^{N\times N}$ – матриця еліпсоїда, називається інваріантним за станом для системи (9), якщо кожна траєкторія системи, що почалася в еліпсоїді, залишається в ньому для будь-якого момента часу $k\ge 0$.

Інваріантний еліпсоїд (11) розглядається як апроксимація множини досяжності замкнутої системи (9), тобто дозволяє характеризувати вплив зовнішніх збурень і невизначеності параметрів моделі на траєкторію замкнутої системи. Порівняння виразів (10) та (11) дозволяє стверджувати, що при виконанні тотожності

$$P(\theta,k)=Q^{-1}(k)\tag{12}$$

еліпсоїд (11) є множиною, яка знаходиться всередині деякої поверхні рівня ФЛ (10). Тоді задача робастної стабілізації системи (9) полягає в обчисленні матриці $K(k)$ такої, щоб регулятор (8) забезпечував мінімізацію за деяким критерієм еліпсоїда (11) при обмеженнях (2). В якості критерію обрано суму квадратів довжин півосей еліпсоїда, яка дорівнює сліду матриці $Q(k)$.

Значення функції Ляпунова (10) з плином часу повинно зменшуватися з гарантованою швидкістю, яка визначається значенням показника якості (6)

$$V\left(\xi(k+1)-\xi^*\right)-V\left(\xi(k)-\xi^*\right)\le-\left(\left(\xi(k)-\xi^*\right)^{\mathrm{T}}W_\xi\left(\xi(k)-\xi^*\right)+u^{\mathrm{T}}(k)W_u u(k)\right). \quad (13)$$

В результаті підсумовування по k від 0 до ∞ лівих і правих частин нерівності типу Ляпунова (13) отримано оцінку: функція Ляпунова (10), обчислена в момент часу $k=0$, визначає верхнє граничне значення критерію якості (6) при будь-яких допустимих збуреннях і будь-якому варіанті реалізації параметричної невизначеності моделі (9). Отже, керуючі впливи $u(k)$ визначаються з умови мінімізації функції Ляпунова (10), обчисленої в момент часу $k=0$,

$$u(k)=\arg\min_{u(k)\in U} V\left(\xi(0)-\xi^*\right). \quad (14)$$

В останньому виразі явно присутні початкові умови $\xi(0)$. Цим керування, отримане в результаті вирішення задачі (14), відрізняється від класичного, отриманого шляхом розв’язання алгебраїчного рівняння Ріккаті, яке призводить до регулятора, що дає оптимальне значення критерію (6) для будь-яких початкових умов. Для уникнення такої ситуації використано результат, який доведено Б. Т. Поляком, М. В. Хлебніковим та П. С. Щербаковим: якщо дискретна динамічна система є стійкою і керованою, то рішення задачі мінімізації квадратичної функції Ляпунова за критерієм сліду матриці

$$\operatorname{tr} P(\theta,k)\to\min \quad (15)$$

при обмеженні, що задається нерівністю типу Ляпунова (13), досягається на рішенні рівняння типу Ляпунова

$$V\left(\xi(k+1)-\xi^*\right)-V\left(\xi(k)-\xi^*\right)=-\left(\left(\xi(k)-\xi^*\right)^{\mathrm{T}}W_\xi\left(\xi(k)-\xi^*\right)+u^{\mathrm{T}}(k)W_u u(k)\right).$$

У підсумку розв’язок задачі (15) при обмеженні (13) визначає регулятор, який збігається з класичним, але при цьому є застосовним для невизначених систем. Такий підхід дозволяє звести задачу синтезу робастного керування до вирішення задачі мінімізації лінійної функції при обмеженнях, які представлено у вигляді лінійних матричних нерівностей (ЛМН), тобто до вирішення задачі напіввизначеного програмування.

Оскільки не існує загального способу визначити матрицю $P(\theta,k)$ функції Ляпунова (10) як функцію від вектора невизначених параметрів $\theta(k)$, здійснюється пошук матриці, яка не залежить від невизначених параметрів моделі, тобто є гарантованим значенням, що відповідає найгіршому можливому сценарію реалізації параметричної невизначеності (4)

$$P(\theta,k)=P(k). \quad (16)$$

Для застосування методу інваріантних еліпсоїдів виконується апроксимація допустимої множини D значень попиту еліпсоїдом найменшого об’єму

$$E(d^*, Q_d) = \{\ d \in \mathrm{R}^q:\ \left(d(k) - d^*\right)^{\mathrm{T}} Q_d^{-1} \left(d(k) - d^*\right) \leq 1\ \}, \qquad (17)$$

параметри якого $Q_d \in \mathrm{R}^{q \times q}$ і $d^* \in \mathrm{R}^q$ визначаються за допомогою виразів:

$$Q_d = \hat{W}^{-2}, \quad d^* = \hat{W}^{-1} \hat{z}, \qquad (18)$$

де $\hat{W}$, $\hat{z}$ – є рішенням задачі напіввизначеного програмування $-\lg\det W \to \min$ при обмеженнях на матричну $W = W^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^{q \times q}$ і векторну $z \in \mathrm{R}^q$ змінні:

$$W \succ 0, \quad \begin{bmatrix} 1 & (Wd_i - z)^{\mathrm{T}} \\ Wd_i - z & I_q \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = \overline{1, 2^q},$$

де $d_i \in \mathrm{R}^q$ – вектори, що містять координати вершин багатогранника D.

Також виконується апроксимація допустимої множини X значень станів початкової моделі (1) еліпсоїдом найменшого об’єму

$$E(x^*, Q_x) = \{\ x \in \mathrm{R}^n:\ \left(x(k) - x^*\right)^{\mathrm{T}} Q_x^{-1} \left(x(k) - x^*\right) \leq 1\ \},$$

у якого вектор координат центру збігається з вектором страхових запасів x^*, а матриця обчислюється в результаті вирішення задачі напіввизначеного програмування $\operatorname{tr} Q_x \to \min$ при обмеженнях на матричну змінну $Q_x = Q_x^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^{n \times n}$:

$$Q_x \succ 0, \quad \begin{bmatrix} 1 & \left(x_i - x^*\right)^{\mathrm{T}} \\ x_i - x^* & Q_x \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = \overline{1, 2^n},$$

де $x_i \in \mathrm{R}^n$ – вектори, що містять координати вершин багатогранника X.

В силу неущербності *S*-процедури при одному обмеженні виконання нерівностей (13) і (17), які представлено у вигляді квадратичних форм щодо вектора $s(k) = \left[\left(\xi(k) - \xi^*\right)^{\mathrm{T}}, \xi^{*\mathrm{T}}, d^{*\mathrm{T}}, \left(d(k) - d^*\right)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$, є еквівалентним виконанню для деякого скаляру $\alpha(k) > 0$ кінцевого числа L лінійних матричних нерівностей:

$$\begin{bmatrix} Q(k) & O_{N\times N} & O_{N\times q} & \left(A^{(j)}Q(k) + BY(k)\right)^{\mathrm{T}} & O_{N\times q} & Q(k)W_\xi & Y^{\mathrm{T}}(k)W_u \\ O_{N\times N} & O_{N\times N} & O_{N\times q} & \left(A^{(j)} - I_N\right)^{\mathrm{T}} & O_{N\times q} & O_{N\times N} & O_{N\times m} \\ O_{q\times N} & O_{q\times N} & O_{q\times q} & G^{\mathrm{T}} & O_{q\times q} & O_{q\times N} & O_{q\times m} \\ A^{(j)}Q(k) + BY(k) & A^{(j)} - I_N & G & Q(k) & GQ_d^{1/2} & O_{N\times N} & O_{N\times m} \\ O_{q\times N} & O_{q\times N} & O_{q\times q} & Q_d^{1/2}G^{\mathrm{T}} & \alpha(k)I_q & O_{q\times N} & O_{q\times m} \\ W_\xi Q(k) & O_{N\times N} & O_{N\times q} & O_{N\times N} & O_{N\times q} & W_\xi & O_{N\times m} \\ W_u Y(k) & O_{m\times N} & O_{m\times q} & O_{m\times N} & O_{m\times q} & O_{m\times N} & W_u \end{bmatrix} \succeq 0, \qquad (19)$$

$$j = \overline{1, L}, \quad \alpha(k) > 0, \quad Q(k) \succ 0,$$

де $O_{n\times m}$ – нульова матриця відповідної розмірності; $Y(k) = K(k)Q(k)$.

Виконання сукупності ЛМН (19) гарантує стабілізацію замкнутої системи (9) при дії збурень $d(k) \in E(d^*, Q_d)$ і будь-якому можливому значенні $A(\theta) \in \Omega$.

Обмеження (2) за допомогою модифікації леми Шура для нечитких матричних нерівностей представляються у вигляді сукупності ЛМН:

$$\begin{bmatrix} Q_x & CQ(k) \\ Q(k)C^{\mathrm{T}} & Q(k) \end{bmatrix} \succeq 0, \qquad (20)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon e_m \left(\xi(k)-\xi^*\right)^{+} Y^{\mathrm{T}}(k) & Y(k) \\ Y^{\mathrm{T}}(k) & Q(k) \end{bmatrix} \preceq 0, \quad \begin{bmatrix} u^{\max} \left(\xi(k)-\xi^*\right)^{+} Y^{\mathrm{T}}(k) & Y(k) \\ Y^{\mathrm{T}}(k) & Q(k) \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (21)$$

де $\varepsilon > 0$ – мала константа; $e_m = [1,1,\ldots,1]^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^{m\times 1}$; «+» – визначає псевдообернення Мура-Пенроуза.

Використання ЛМН (21) призводить до закону керування у вигляді динамічного зворотного зв'язку, оскільки матриці нерівностей залежать від поточного значення вектору станів $\xi(k)$.

Результат розв'язання задачі синтезу обмеженого робастного гарантуючого керування запасами в мережах поставок є таким: якщо для системи (9) з параметричною невизначеністю (4) і обмеженнями (2) матриці $\hat{Q}(k)$, $\hat{Y}(k)$ є розв'язком оптимізаційної задачі

$$\operatorname{tr} Q(k) \to \min \qquad (22)$$

при обмеженнях (19) – (21) на матричні змінні $Q(k) = Q^{\mathrm{T}}(k) \in \mathrm{R}^{N\times N}$, $Y(k) \in \mathrm{R}^{m\times N}$ і скалярний параметр $\alpha(k)$, то:

1) для будь-якого початкового стану $\xi(0) = [x^{\mathrm{T}}(0), u^{\mathrm{T}}(-1), \ldots, u^{\mathrm{T}}(-\Lambda)]^{\mathrm{T}}$, де $x(0) \ge x^*$, $u(k) = O_{m\times 1}$ $\forall k \le 0$ і будь-якої матриці $A(\theta) \in \Omega$, а також зовнішнього збурення $d(k) \in E(d^*, Q_d)$ система (9) є робастно стійкою при обмеженнях (2);

2) серед усіх лінійних керувань виду (8) регулятор з матрицею

$$K(k) = \hat{Y}(k)\hat{Q}^{-1}(k) \qquad (23)$$

доставляє мінімум за критерієм сліду матриці інваріантному еліпсоїду (11) для замкнутої системи (9) в момент часу k.

Відзначено, що отриманим результатам є притаманним певний консерватизм, який виявляється в тому, що з практичної точки зору одержувані границі робастності є невиправдано заниженими. Причина цього криється в мінімаксній природі підходу, який розрахований на реалізацію найгіршого можливого варіанту параметричної невизначеності моделі. Для зменшення ступеня консерватизму використано наступний підхід. Якщо вектор $\theta(k)$ невизначених параметрів моделі може бути виміряний або оцінений в реальному часі, то матриця параметризованої функції Ляпунова (10) визначається таким чином:

$$P(\theta,k) = \sum_{i=1}^{L} \theta_i(k) P_i(k), \quad P_i(k) = P_i^{\mathrm{T}}(k) \succ 0. \qquad (24)$$

Тоді інваріантний за станом еліпсоїд для системи (9) визначається як

$$E(\xi^*, Q(\theta,k)) = \{\ \xi \in \mathrm{R}^N :\ \left(\xi(k)-\xi^*\right)^{\mathrm{T}} Q^{-1}(\theta,k)\left(\xi(k)-\xi^*\right) \le 1\ \},$$

де $Q(\theta,k) = \sum_{i=1}^{L} \theta_i(k) Q_i(k)$, $Q_i(k) = P_i^{-1}(k)$.

Дискретна система (9) $\forall A(\theta)\in\Omega$ і $\forall d(k)\in E(d^*,Q_d)$ є робастно стійкою, якщо існують симетричні додатно визначені матриці $P_1(k),\dots,P_L(k)$ такі, що для всіх $1\le i\le j\le p\le L$ виконуються нерівності

$$\begin{gathered}\left(A^{(i)}\xi(k)+Bu(k)+Gd(k)-\xi^*\right)^{\mathrm T}P_j(k)\left(A^{(p)}\xi(k)+Bu(k)+Gd(k)-\xi^*\right)-\\-\left(\xi(k)-\xi^*\right)^{\mathrm T}P_i(k)\left(\xi(k)-\xi^*\right)\le-\left(\left(\xi(k)-\xi^*\right)^{\mathrm T}W_\xi\left(\xi(k)-\xi^*\right)+u(k)^{\mathrm T}W_u u(k)\right).\end{gathered}\tag{25}$$

В силу неущербності *S*-процедури при одному обмеженні виконання нерівностей (25) і (17), які представлено у вигляді квадратичних форм щодо вектора $s(k)$, є еквівалентним виконанню для деякого скаляру $\alpha(k)>0$ сукупності ЛМН:

$$\begin{bmatrix}Z^{(1i1)} & Z^{(1i2)} & \cdots & Z^{(1iL)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ Z^{(Li1)} & Z^{(Li2)} & \cdots & Z^{(LiL)}\end{bmatrix}\succeq 0,\quad Q_i(k)\succ 0,\quad i=\overline{1,L},\quad \alpha(k)>0\,,\tag{26}$$

де $Y_{ij}(k)=K_i(k)Q_j(k),\ i,j=\overline{1,L}$,

$$Z^{(ijp)}=\begin{bmatrix}Q_i(k) & O_{N\times N} & O_{N\times q} & \left(A^{(i)}Q_j(k)+BY_{ij}(k)\right)^{\mathrm T} & O_{N\times q} & Q_j(k)W_\xi & Y_{ij}^{\mathrm T}(k)W_u\\ O_{N\times N} & O_{N\times N} & O_{N\times q} & \left(A^{(i)}-I_N\right)^{\mathrm T} & O_{N\times q} & O_{N\times N} & O_{N\times m}\\ O_{q\times N} & O_{q\times N} & O_{q\times q} & G^{\mathrm T} & O_{q\times q} & O_{q\times N} & O_{q\times m}\\ A^{(p)}Q_j(k)+BY_{pj}(k) & A^{(p)}-I_N & G & Q_j(k) & GQ_d^{1/2} & O_{N\times N} & O_{N\times m}\\ O_{q\times N} & O_{q\times N} & O_{q\times q} & Q_d^{1/2}G^{\mathrm T} & \alpha(k)I_q & O_{q\times N} & O_{q\times m}\\ W_\xi Q_j(k) & O_{N\times N} & O_{N\times q} & O_{N\times N} & O_{N\times q} & W_\xi & O_{N\times m}\\ W_uY_{pj}(k) & O_{m\times N} & O_{m\times q} & O_{m\times N} & O_{m\times q} & O_{m\times N} & W_u\end{bmatrix}.$$

По аналогії з (20), (21) обмеження (2) представляються у вигляді ЛМН:

$$\begin{bmatrix}Q_x & CQ_i(k)\\ Q_i(k)C^{\mathrm T} & Q_i(k)\end{bmatrix}\succeq 0\,,\tag{27}$$

$$\begin{bmatrix}\varepsilon e_m\left(\xi(k)-\xi^*\right)^{+}Y^{\mathrm T}(k) & Y(k)\\ Y^{\mathrm T}(k) & Q_i(k)\end{bmatrix}\preceq 0,\ \begin{bmatrix}u^{\max}\left(\xi(k)-\xi^*\right)^{+}Y^{\mathrm T}(k) & Y(k)\\ Y^{\mathrm T}(k) & Q_i(k)\end{bmatrix}\succeq 0,\ i=\overline{1,L}\,.\tag{28}$$

Тоді результат розв'язання задачі синтезу керування на основі параметризованої функції Ляпунова (10), (24) є таким: якщо для системи (9) з параметричною невизначеністю (4) і обмеженнями (2) матриці $\hat{Q}_i(k),\hat{Y}_{ii}(k),i=\overline{1,L}$ є розв'язком оптимізаційної задачі

$$\sum_{i=1}^{L}\operatorname{tr}Q_i(k)\to\min\tag{29}$$

при обмеженнях (26) – (28) на матричні змінні $Q_i(k)=Q_i^{\mathrm T}(k)\in\mathrm R^{N\times N}$, $Y_{ii}(k)\in\mathrm R^{m\times N}$, $Z^{(iii)}\in\mathrm R^{(4N+2q+m)\times(4N+2q+m)}, i=\overline{1,L}$; $Z^{(iij)}=Z^{(jii)\mathrm T}, Z^{(iji)},\ i,j=\overline{1,L},\ j\ne i$; $Z^{(ijp)}=Z^{(pji)\mathrm T},\ Z^{(ipj)}=Z^{(jpi)\mathrm T},\ Z^{(jip)}=Z^{(pij)\mathrm T},\ i=\overline{1,L-2},\ j=\overline{1,L-1},\ p=\overline{1,L}$ і скаляр

$\alpha(k)$, то результати є аналогічними наведеним вище з урахуванням того, що матриця регулятора визначається як

$$K(k)=\sum_{i=1}^{L}\theta_i(k)K_i(k), \quad K_i(k)=\hat{Y}_{ii}(k)\hat{Q}_i^{-1}(k), \quad i=\overline{1,L}. \tag{30}$$

У наведених способах вирішення задачі матриця регулятора обчислюється на підставі матриці, яка є зворотною до матриці Ляпунова $P(\theta,k)$ (див. (23) і (30)). Проте, для зменшення ступеня консерватизму результатів керування потрібно, щоб при визначенні матриці регулятора не використовувалися матриці, які залежать від вектору $\theta(k)$ невизначених параметрів моделі.

Якщо в моделі об'єктів керування вводяться додаткові змінні стану, які мають описовий смисл, такі моделі називають дескрипторними. Через наявність додаткових алгебраїчних зв'язків між змінними стану дескрипторні моделі набувають властивостей, які є нехарактерними для традиційного способу опису систем, що надає розробнику додаткові можливості.

Вводиться змінна $y(k)=\xi(k+1)$ та виконується перетворення рівняння динаміки розширеної моделі (5) за допомогою дескрипторної системи

$$\begin{bmatrix} I_N & O_{N\times N} \\ O_{N\times N} & O_{N\times N}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi(k+1)\\ y(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} O_{N\times N} & I_N \\ A(\theta) & -I_N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi(k)\\ y(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}O_{N\times m}\\ B\end{bmatrix}u(k)+\begin{bmatrix}O_{N\times q}\\ G\end{bmatrix}d(k). \tag{31}$$

Після введення позначень $E=\begin{bmatrix} I_N & O_{N\times N} \\ O_{N\times N} & O_{N\times N}\end{bmatrix}$, $\overline{A}(\theta)=\begin{bmatrix} O_{N\times N} & I_N \\ A(\theta) & -I_N\end{bmatrix}$,

$\widetilde{A}(\theta)=\begin{bmatrix} O_{N\times N} \\ A(\theta)-I_N\end{bmatrix}$, $\overline{B}=\begin{bmatrix}O_{N\times m}\\ B\end{bmatrix}$, $\overline{G}=\begin{bmatrix}O_{N\times q}\\ G\end{bmatrix}$, $\overline{\xi}(k)=\begin{bmatrix}\xi(k)\\ y(k)\end{bmatrix}$, $\overline{\xi}^*=\begin{bmatrix}\xi^*\\ \xi^*\end{bmatrix}$

та блокової матриці $P(\theta,k)=\begin{bmatrix}P_1(\theta,k) & O_{N\times N}\\ P_2(k) & P_3(k)\end{bmatrix}$, де $P_i\in \mathrm{R}^{N\times N}$, $i=\overline{1,3}$,

$P_1(\theta,k)=P_1^{\mathrm{T}}(\theta,k)=\sum_{i=1}^{L}\theta_i P_{1i}(k)$, $P_{1i}(k)\succ 0$, $P_3(k)=P_3^{\mathrm{T}}(k)$, параметризовану функцію Ляпунова, яка побудована на рішеннях системи (31), замкнутої керуванням (8), визначено у вигляді

$$V\left(\xi(k)-\xi^*\right)=\left(\overline{\xi}(k)-\overline{\xi}^*\right)^{\mathrm{T}}EP(\theta,k)\left(\overline{\xi}(k)-\overline{\xi}^*\right)=\left(\xi(k)-\xi^*\right)^{\mathrm{T}}P_1(\theta,k)\left(\xi(k)-\xi^*\right). \tag{32}$$

Після обчислення першої різниці по k ФЛ (32) в силу системи (31) нерівність типу Ляпунова приймає вигляд

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\Big[\left(\overline{A}(\theta)\left(\overline{\xi}(k)-\overline{\xi}^*\right)+\overline{B}u(k)+\overline{G}d(k)+\widetilde{A}(\theta)\xi^*\right)^{\mathrm{T}}\left(P(\theta,k)+P^{\mathrm{T}}(\theta,k)\right)\times\\ \times\left(\overline{A}(\theta)\left(\overline{\xi}(k)-\overline{\xi}^*\right)+\overline{B}u(k)+\overline{G}d(k)+\widetilde{A}(\theta)\xi^*\right)-\\ -\left(\overline{\xi}(k)-\overline{\xi}^*\right)^{\mathrm{T}}EP(\theta,k)\left(\overline{\xi}(k)-\overline{\xi}^*\right)-\left(\overline{\xi}(k)-\overline{\xi}^*\right)^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}(\theta,k)E^{\mathrm{T}}\left(\overline{\xi}(k)-\overline{\xi}^*\right)\Big]\le\\ \le-\left(\left(\xi(k)-\xi^*\right)^{\mathrm{T}}W_\xi\left(\xi(k)-\xi^*\right)+u(k)^{\mathrm{T}}W_u u(k)\right).\end{gathered} \tag{33}$$

Вводяться матричні змінні $S(k)$ і $Y(k)$ такі, що

$$P_2(k)B = BS(k), \quad Y(k) = S(k)K(k).$$

В силу неущербності *S*-процедури при одному обмеженні виконання нерівностей (33) і (17), які представлено у вигляді квадратичних форм щодо вектора $s(k) = \left[\left(\xi(k)-\xi^*\right)^{\mathrm{T}}, \left(y(k)-\xi^*\right)^{\mathrm{T}}, \xi^*, d^{*\mathrm{T}}, \left(d(k)-d^*\right)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$, є еквівалентним виконанню для деякого скаляру $\alpha(k) > 0$ сукупності ЛМН:

$$\begin{bmatrix} Z^{(11)} & Z^{(12)} & \cdots & Z^{(1L)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z^{(L1)} & Z^{(L2)} & \cdots & Z^{(LL)} \end{bmatrix} \preceq 0, \quad \begin{bmatrix} P_2(k)BB^{\mathrm{T}} & BS(k) \\ S^{\mathrm{T}}(k)B^{\mathrm{T}} & S(k) \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \alpha(k) > 0, \tag{34}$$

$$P_{1i}(k) \succ 0, \quad H_i(k) \succ 0, \quad \begin{bmatrix} H_i(k) & I_N \\ I_N & P_{1i}(k) \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = \overline{1, L}, \tag{35}$$

де

$$Z^{(ij)} = \begin{bmatrix} -P_{1ij}(k) & \Psi^{(i)\mathrm{T}}(k) & O_{N\times N} & O_{N\times q} & O_{N\times q} & \Psi^{(i)\mathrm{T}}(k) & O_{N\times q} & W_\xi & Y^{\mathrm{T}}(k)W_u \\ \Psi^{(j)}(k) & P_{1ij}(k)-P_2(k)+P_2^{\mathrm{T}}(k) & P_2^{\mathrm{T}}(k)\left(A^{(j)}-I_N\right) & P_2^{\mathrm{T}}(k)G & P_2^{\mathrm{T}}(k)G & -2P_2(k) & O_{N\times q} & O_{N\times N} & O_{N\times N} \\ O_{N\times N} & \left(A^{(i)}-I_N\right)^{\mathrm{T}}P_2(k) & O_{N\times N} & O_{N\times q} & O_{N\times q} & \left(A^{(i)}-I_N\right)^{\mathrm{T}}P_2(k) & O_{N\times q} & O_{N\times N} & O_{N\times N} \\ O_{q\times N} & G^{\mathrm{T}}P_2(k) & O_{q\times N} & O_{q\times q} & O_{q\times q} & G^{\mathrm{T}}P_2(k) & O_{q\times q} & O_{q\times N} & O_{q\times N} \\ O_{q\times N} & G^{\mathrm{T}}P_2(k) & O_{q\times N} & O_{q\times q} & O_{q\times q} & G^{\mathrm{T}}P_2(k) & O_{q\times q} & O_{q\times N} & O_{q\times N} \\ \Psi^{(j)}(k) & -2P_2^{\mathrm{T}}(k) & P_2^{\mathrm{T}}(k)\left(A^{(j)}-I_N\right) & P_2^{\mathrm{T}}(k)G & P_2^{\mathrm{T}}(k)G & P_2^{\mathrm{T}}(k) & P_2^{\mathrm{T}}(k)GQ_d^{1/2} & O_{N\times N} & O_{N\times N} \\ O_{q\times N} & O_{q\times N} & O_{q\times N} & O_{q\times q} & O_{q\times q} & Q_d^{1/2}G^{\mathrm{T}}P_2(k) & \alpha(k)I_q & O_{q\times q} & O_{q\times N} \\ W_\xi & O_{N\times N} & O_{N\times N} & O_{N\times q} & O_{N\times q} & O_{N\times N} & O_{N\times q} & -W_\xi & O_{N\times N} \\ W_uY(k) & O_{N\times N} & O_{N\times N} & O_{N\times q} & O_{N\times q} & O_{N\times N} & O_{N\times q} & O_{N\times N} & -W_u \end{bmatrix},$$

$$P_{1ij}(k) = P_{1i}(k) + P_{1j}(k), \; \Psi^{(i)}(k) = P_2^{\mathrm{T}}(k)A^{(i)} + BY(k).$$

По аналогії з (20), (21) обмеження (2) представляються у вигляді ЛМН:

$$\begin{bmatrix} Q_x & C \\ C^{\mathrm{T}} & P_{1i}(k) \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = \overline{1, L}, \tag{36}$$

$$\begin{bmatrix} Y^{\mathrm{T}}(k)\varepsilon e_m\left(\xi(k)-\xi^*\right)^+ & Y^{\mathrm{T}}(k) \\ Y(k) & S(k) \end{bmatrix} \preceq 0, \quad \begin{bmatrix} Y^{\mathrm{T}}(k)u^{\max}\left(\xi(k)-\xi^*\right)^+ & Y^{\mathrm{T}}(k) \\ Y(k) & S(k) \end{bmatrix} \succeq 0. \tag{37}$$

Для системи (31), яка замкнута керуванням (8), визначено інваріантний за станом еліпсоїд

$$E(\xi^*, P_1^{-1}(\theta,k)) = \{\, \xi \in \mathrm{R}^N : \left(\xi(k)-\xi^*\right)^{\mathrm{T}} P_1(\theta,k)\left(\xi(k)-\xi^*\right) \le 1 \}.$$

Отже, цільова функція задачі $\sum_{i=1}^{L} \operatorname{tr} P_{1i}^{-1}(k) \to \min$ є нелінійною. Проте, вказана задача є еквівалентною задачі

$$\sum_{i=1}^{L} \operatorname{tr} H_i(k) \to \min \tag{38}$$

при обмеженнях $\begin{bmatrix} H_i(k) & I_N \\ I_N & P_{1i}(k) \end{bmatrix} \succeq 0$, $H_i(k) \succ 0$, $H_i(k) \in \mathrm{R}^{N\times N}$, $i = \overline{1, L}$.

Тоді результат розв'язання задачі синтезу керування на основі дескрипторного підходу з використанням параметризованої ФЛ (32) є таким: якщо для системи (9) з параметричною невизначеністю (4) і обмеженнями (2) матриці $\hat{S}(k)$ і $\hat{Y}(k)$ отримані в результаті вирішення задачі (38) при обмеженнях (34) – (37) на матричні змінні $P_{1i}(k) = P_{1i}^{\mathrm{T}}(k) \in \mathrm{R}^{N\times N}$, $H_i(k) \in \mathrm{R}^{N\times N}$, $i = \overline{1, L}$; $P_2(k) \in \mathrm{R}^{N\times N}$, $S(k) \in \mathrm{R}^{m\times m}$, $Y(k) \in \mathrm{R}^{m\times N}$; $Z^{(ii)} \in \mathrm{R}^{(5N+2q+m)\times(5N+2q+m)}$, $i = \overline{1, L}$; $Z^{(ij)} = Z^{(ji)\mathrm{T}}$, $i = \overline{1, L-1}$, $j = \overline{i+1, L}$ і скаляр $\alpha(k)$, то результати є аналогічними наведеним вище з урахуванням того, що матриця регулятора визначається як

$$K(k) = \hat{S}^{-1}(k)\hat{Y}(k). \tag{39}$$

Таким чином, за допомогою дескрипторного підходу отримано, що матриці $Z^{(ij)}$, з яких сформовано перше з ЛМН (34), не містять добутку матриці $A(\theta)$ динаміки системи і матриці Ляпунова $P_1(\theta, k)$. В результаті при обчисленні матриці регулятора не використовуються матриці, які явно залежать від вектора $\theta(k)$ невизначених параметрів моделі.

В якості прикладу досліджено лінію з виробництва миючого засобу ТМ «SAMA», який випускається ТзОВ Компанією «СВ» (м. Харків). Технологічний процес передбачає виготовлення 1 тонни напівфабрикату шляхом змішування 90 % абразиву, 5 % соди і 5 % поверхнево активної речовини, після чого в засіб додають ароматизатор, розфасовують у банки по 500 грам і закривають кришкою. Модель відповідної

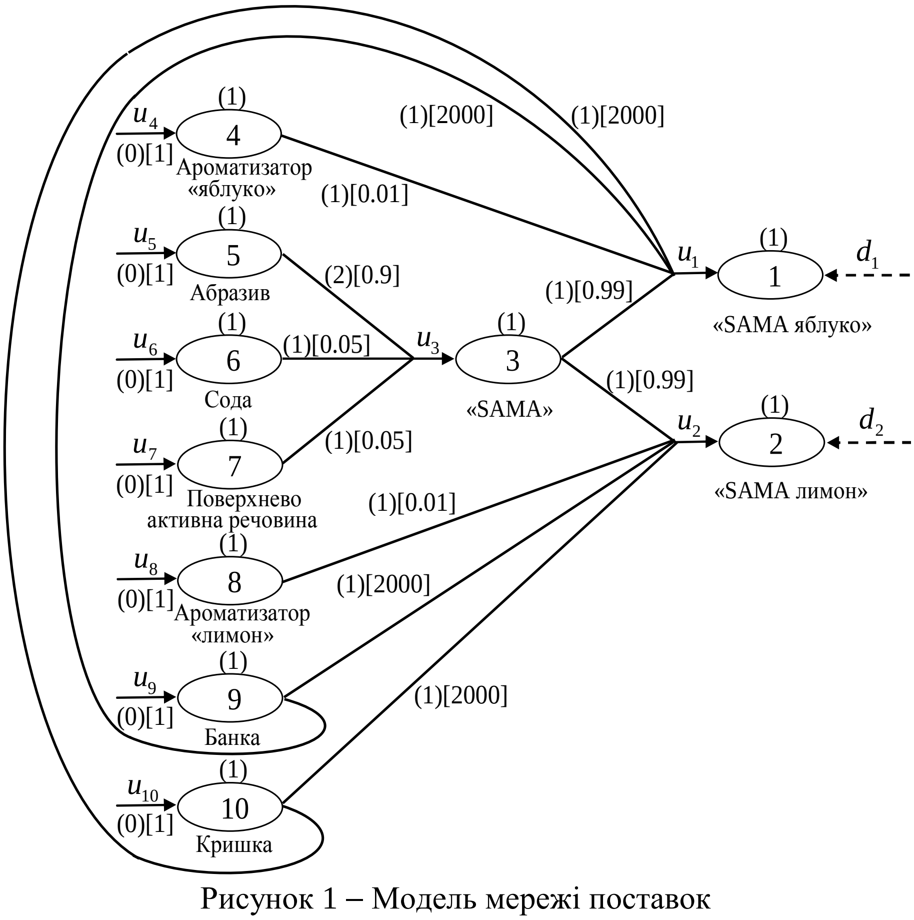


Рисунок 1 – Модель мережі поставок

мережі зображено на рис. 1. Керовані потоки u_1, u_2 і u_3, що описують процеси перемішування ресурсів і розфасовки, представлені у вигляді гіпердуг, потоки $u_4 - u_{10}$ описують поставки сировини ззовні. Дуги d_1 і d_2, зображені пунктирними лініями, представляють зовнішній попит. Період дискретизації дорівнює 1 добі. Значення часу транспортування та кількість ресурсів $[\Pi]_{ij}$, яка потрібна відповідно до технологічного процесу, вказані для кожного керованого потоку в круглих і квадратних дужках, відповідно. Біля кожного вузла в круглих дужках вказані значення часу виконання замовлення. Максимальне значення інтервалу запізнення $\Lambda = 3$, розмірність вектору станів розширеної моделі $N = 40$. Задано обмеження на рівні запасів і розміри замовлень:

$$x^{\max} = [6{,}0;\, 15{,}0;\, 20{,}0;\, 0{,}05;\, 18{,}0;\, 1{,}0;\, 1{,}0;\, 0{,}15;\, 40000;\, 40000]^{\mathrm{T}},$$

$$u^{\max} = [1{,}0;\, 3{,}0;\, 4{,}0;\, 0{,}4;\, 3{,}0;\, 0{,}8;\, 0{,}8;\, 0{,}4;\, 6000;\, 6000]^{\mathrm{T}}.$$

На основі інформації про обсяги попиту впродовж березня 2015 року визначено граничні значення попиту $d^{\min} = [0;\, 0]^{\mathrm{T}}$, $d^{\max} = [1{,}52;\, 3{,}75]^{\mathrm{T}}$. У відповідності до (7) для початкового стану визначено рівні страхових запасів

$$x^{*} = [3{,}04;\, 7{,}5;\, 10{,}44;\, 0{,}03;\, 9{,}39;\, 0{,}52;\, 0{,}52;\, 0{,}08;\, 21080;\, 21080]^{\mathrm{T}}.$$

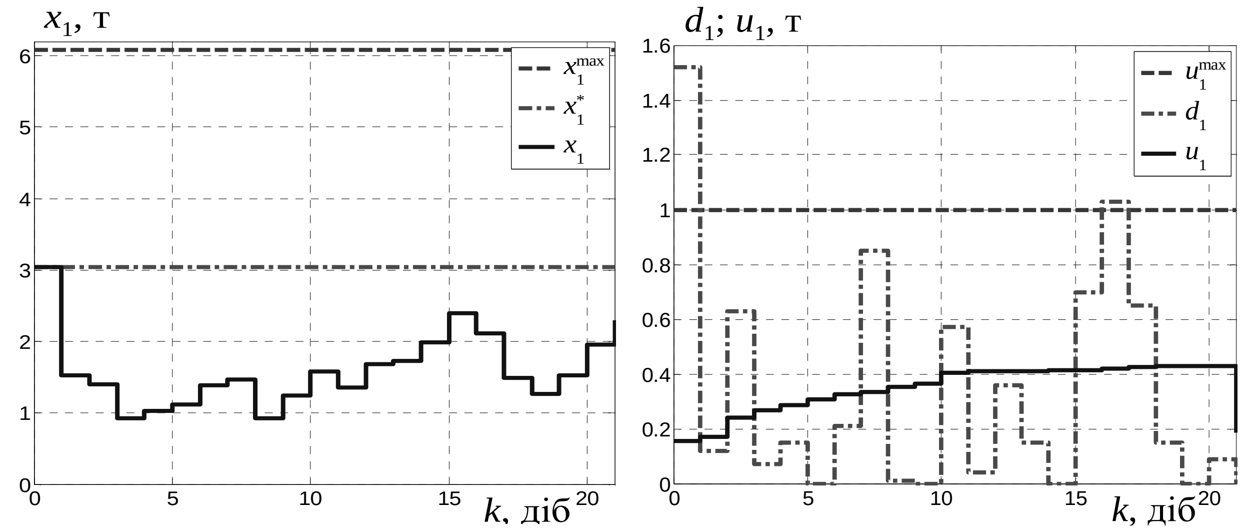
Якщо час транспортування банок від вузла 9 до вузлів 1 і 2 збільшується на один період, тобто $T_{9,1} = T_{9,2} \in \{1,\, 2\}$, то значення інтервалів транспортних запізнень вузлів 1 і 2 належать множині $\Lambda_1 = \Lambda_2 \in \{2,\, 3\}$. В результаті отримано $A(\theta) \in \Omega = \mathrm{Conv}\{A^{(1)},\, A^{(2)}\}$, де

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} I_{10} & B_1 & B_2^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & \cdots \\ 0 & \mathbf{1} & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} & B_3^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 0 & \cdots \\ 0 & \mathbf{0} & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \\ O_{10\times10} & O_{10\times10} & O_{10\times10} & O_{10\times10} \\ O_{10\times10} & I_{10} & O_{10\times10} & O_{10\times10} \\ O_{10\times10} & O_{10\times10} & I_{10} & O_{10\times10} \end{bmatrix},\quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} I_{10} & B_1 & B_2^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 0 & \cdots \\ 0 & \mathbf{0} & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} & B_3^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & \cdots \\ 0 & \mathbf{1} & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \\ O_{10\times10} & O_{10\times10} & O_{10\times10} & O_{10\times10} \\ O_{10\times10} & I_{10} & O_{10\times10} & O_{10\times10} \\ O_{10\times10} & O_{10\times10} & I_{10} & O_{10\times10} \end{bmatrix}.$$

Значення елементів діагональних вагових матриць $W_{\xi} \in \mathrm{R}^{40\times40}$ і $W_u \in \mathrm{R}^{10\times10}$, що визначають критерій якості керування (6), дорівнюють 0,4. Моделювання здійснено протягом 22 періодів (кількість робочих днів у березні 2015 року). Варіант реалізації матриці динаміки системи $A^{(1)}$ або $A^{(2)}$ в кожному періоді вибирався випадково.

Чисельне вирішення відповідних задач напіввизначеного програмування виконано в середовищі MATLAB за допомогою вільно поширюваного програмного пакету cvx. Графіки перехідних процесів для вузла 1, які отримано за допомогою дескрипторного підходу із використанням параметризованої функції Ляпунова (32), представлено на рис. 2, 3.

Проведено аналіз впливу початкових умов і різних способів побудови регулятора на якість перехідних процесів в системі та значення показника якості керування. На підставі результатів моделювання зроблено висновки: 1) розміри інваріантного еліпсоїда замкнутої системи лінійно залежать від розмірів еліпсоїда, який апроксимує множину значень зовнішнього попиту; 2) обирати початкові рівні запасів ресурсів більшими, ніж відповідні рівні страхових запасів, є недоцільним. Здійснено порівняння ступенів робастності систем керування, отриманих на основі різних підходів, шляхом порівняння значень критерію якості керування, які наведено в табл. 1, де також представлено розмірності відповідних ЛМН. Мінімальне значення критерію якості отримано за допомогою дескрипторного підходу, основним недоліком якого є збільшення обчислювальної складності оптимізаційної задачі в порівнянні з методом побудови функції Ляпунова, яка не залежить від невизначених параметрів моделі.



а *б*

Рисунок 2 – Графіки перехідних процесів для вузла 1: *а* – значення граничного, страхового та наявного рівнів запасів; *б* – значення зовнішнього попиту і розмірів замовлень

Таблиця – Результати синтезу системи керування запасами

Характеристики задачі	Використання ФЛ, яка не залежить від параметрів	Використання параметризованої ФЛ	Дескрипторний підхід з використанням параметризованої ФЛ
$J_{\infty}(k)\times 10^8$	9,465	9,330	8,926
Розмірність ЛМН	$L(4N+2q+m)$	$L^3(4N+2q+m)$	$L^2(5N+2q+m)$

П’ятий розділ присвячений розв’язанню проблеми синтезу робастного керування запасами в мережах поставок на основі децентралізованого підходу.

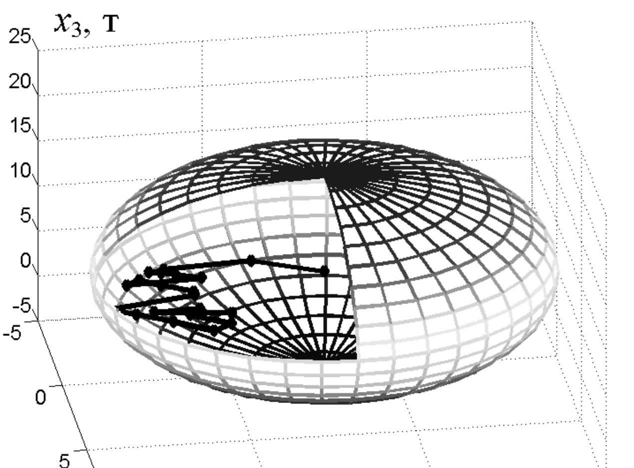


Рисунок 3 – Фазова траєкторія системи і проекція інваріантного еліпсоїда замкнутої системи на тривимірний підпростір

Виконано декомпозицію мережі поставок S на локальні підсистеми S_i, $i=\overline{1,N}$, які є децентралізованими за входами. Виміряні значення станів вузлів мережі надходять тільки на локальні регулятори, кожен з яких формує керуючі впливи для певного вузла. Кожному вузлу мережі доступний лише обмежений обсяг інформації, а саме: локальні обмеження на рівні запасів і розміри замовлень; граничні значення попиту з боку вузлів, які є споживачами ресурсів; номінальні значення інтервалів транспортних запізнень для вузлів мережі, які є постачальниками ресурсів. Запропонований підхід засновано на робастній стабілізації підсистем із застосуванням методу інваріантних еліпсоїдів з подальшим аналізом стійкості системи вцілому з урахуванням взаємозв’язків.

Поведінка системи S визначається рівняннями динаміки підсистем S_i, кожне з яких є різницевим рівнянням з запізненням, аналогічним рівнянню (1). Вектор зовнішніх впливів окремого вузла $w_i(k) \in \mathrm{R}^{n_i}$ включає функції зовнішнього попиту і попиту, формованого вузлами мережі, для яких вузол S_i є постачальником ресурсів

$$w_i(k) = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{N} \Pi_{ij} u_j(k) + \Pi_i d(k), \qquad (40)$$

де $\Pi_{ij} \in \mathrm{R}^{n_i \times m_j}$, $i, j = \overline{1, N}$ – продуктивні матриці, які сформовано на підставі опису технологічного процесу; $\Pi_i \in \mathrm{R}^{n_i \times q}$ – матриця впливу зовнішніх збурень. Вектор $x(k) = \left[x_1^{\mathrm{T}}(k),\ldots,x_N^{\mathrm{T}}(k)\right]^{\mathrm{T}}$ розмірності $n = \sum_{i=1}^{N} n_i$ є вектором станів системи S.

У процесі функціонування мережі повинні виконуватися локальні обмеження, які є аналогічними (2). Перетворення моделі вузла до стандартного виду без запізнення, а також побудову матриці динаміки вузла у разі невизначеності інтервалів запізнень виконано аналогічно тому, як це зроблено при централізованому підході. У результаті розширену модель вузла S_i в умовах невизначеності інтервалів транспортних запізнень представлено у вигляді моделі з параметричною невизначеністю афінного типу, яка є аналогічною (5). Локальні критерії якості керування визначено аналогічно (6).

Для системи, яка складається з взаємозв’язаних вузлів з параметричною невизначеністю, динаміка яких описується рівняннями, аналогічними (5), здійснено постановку задачі синтезу децентралізованого робастного керування запасами, яке $\forall d(k) \in D$ $\forall k \ge 0$ і $\forall A_i(\theta_i) \in \Omega_i$ забезпечує: задоволення попиту на ресурси, тобто виконання першого з обмежень (2) на значення станів; робастну стійкість замкнутих підсистем при виконанні другого з обмежень (2) на значення керуючих дій; гарантовані значення локальних показників якості.

Для апроксимації множин значень зовнішніх впливів локальних вузлів еліпсоїдами мінімального об’єму визначено граничні значення зовнішніх впливів для кожного з вузлів на підставі даних про зовнішній попит. Для вирішення задачі запропоновано наступний алгоритм.

1. $\forall i = \overline{1, N}$: $d_i^{\min} = \Pi_i d^{\min}$, $d_i^{\max} = \Pi_i d^{\max}$.

2. $\forall i = \overline{1, q}$: $\Pi_i^{\min} = \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{q} \Pi_{ij} d_j^{\min}$, $\Pi_i^{\max} = \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{q} \Pi_{ij} d_j^{\max}$, $w_i^{\min} = d_i^{\min} + \Pi_i^{\min}$, $w_i^{\max} = d_i^{\max} + \Pi_i^{\max}$.

3. $\forall i = \overline{q+1, N}$: $\Pi_i^{\min} = \sum_{j=1}^{i-1} \Pi_{ij}\left(\Pi_j^{\min} + d_j^{\min}\right)$, $\Pi_i^{\max} = \sum_{j=1}^{i-1} \Pi_{ij}\left(\Pi_j^{\max} + d_j^{\max}\right)$,

$$w_i^{\min} = d_i^{\min} + \Pi_i^{\min}, \quad w_i^{\max} = d_i^{\max} + \Pi_i^{\max}.$$

Тоді множина значень зовнішніх впливів кожного з вузлів S_i апроксимується еліпсоїдом (17), параметри якого обчислюються згідно (18) після вирішення відповідної задачі напіввизначеного програмування.

Локальний закон керування побудовано по аналогії з (8) у вигляді лінійного динамічного зворотного зв’язку за станом

$$u_i(k) = K_i(k)\left(\xi_i(k) - \xi_i^*\right), \qquad (41)$$

де ξ_i^* – вектор, що складений з $(\Lambda_i + 1)$ векторів x_i^*, які визначають розміри страхових запасів вузла S_i і обчислюються відповідно до $x_i^* = \Lambda_i w_i^{\max}$.

Тоді матриці локальних регуляторів обчислюються за одним із варіантів:

– за формулою (23) шляхом побудови функції Ляпунова (10), (16) в результаті вирішення послідовності задач напіввизначеного програмування, аналогічних задачі (22) при обмеженнях (19) – (21);

– за формулою (30) шляхом побудови параметризованої функції Ляпунова (10), (24) в результаті вирішення послідовності задач, аналогічних задачі (29) при обмеженнях (26) – (28);

– за формулою (39) на підставі дескрипторного опису системи з використанням параметризованої функції Ляпунова (32) в результаті вирішення послідовності задач, аналогічних задачі (38) при обмеженнях (34) – (37).

Для аналізу стійкості децентралізованої системи керування запасами в мережі поставок S застосовано метод порівняння і метод векторних функцій Ляпунова. Рівняння динаміки розширеної моделі вузла з урахуванням взаємозв'язків (40) має вигляд

$$\xi_i(k+1) = A_i(\theta_i)\xi_i(k) + B_i u_i(k) + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{N} B_{ij} u_j(k) + F_i d(k), \qquad (42)$$

де матриці $B_{ij} \in \mathrm{R}^{N_i \times m_j}$, $F_i \in \mathrm{R}^{N_i \times q}$ мають блокову структуру:

$$B_{ij}^{\mathrm{T}} = [\Pi_{ij}^{\mathrm{T}} E_i^{\mathrm{T}} \mid O_{m_i \times m_j}^{\mathrm{T}} \mid \cdots \mid O_{m_i \times m_j}^{\mathrm{T}}], \quad F_i^{\mathrm{T}} = [\Pi_i^{\mathrm{T}} E_i^{\mathrm{T}} \mid O_{m_i \times q}^{\mathrm{T}} \mid \cdots \mid O_{m_i \times q}^{\mathrm{T}}].$$

Рівняння (42) з урахуванням керування (41) набуде вигляду

$$\xi_i(k+1) = A_{f\,i}(\theta_i, k)\left(\xi_i(k) - \xi_i^*\right) + A_i(\theta_i)\xi_i^* + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{N} F_{ij}(k)\left(\xi_j(k) - \xi_j^*\right) + F_i d(k),$$

де $F_{ij}^{\mathrm{T}}(k) = [K_j^{\mathrm{T}}(k)\Pi_{ij}^{\mathrm{T}} E_i^{\mathrm{T}} \mid O_{m_i \times N_j}^{\mathrm{T}} \mid \cdots \mid O_{m_i \times N_j}^{\mathrm{T}}]$, $A_{f\,i}(\theta_i, k) = A_i(\theta_i) + B_i K_i(k)$.

Для мережі поставок S будується векторна функція Ляпунова

$$V\left(\xi(k) - \xi^*\right) = \left[v_1\left(\xi_1(k) - \xi_1^*\right), \ldots, v_N\left(\xi_N(k) - \xi_N^*\right)\right]^{\mathrm{T}}, \qquad (43)$$

де $\xi(k) = \left[\xi_1^{\mathrm{T}}(k), \ldots, \xi_N^{\mathrm{T}}(k)\right]^{\mathrm{T}}$; $\xi^* = [\xi_1^{*\mathrm{T}}, \ldots, \xi_N^{*\,\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$. Компонентами функції (43) є функції Ляпунова локальних підсистем S_i у формі Д. Шильяка

$$v_i\left(\xi_i(k) - \xi_i^*\right) = \left(\left(\xi_i(k) - \xi_i^*\right)^{\mathrm{T}} P_i(\theta_i, k)\left(\xi_i(k) - \xi_i^*\right)\right)^{1/2}, \; i = \overline{1, N}.$$

На основі векторної ФЛ (43) будується модульна функція Ляпунова

$$V_0\left(\xi(k) - \xi^*\right) = \sum_{i=0}^{N} p_{0i}\left|v_i\left(\xi_i(k) - \xi_i^*\right)\right| = P_0 V\left(\xi(k) - \xi^*\right), \qquad (44)$$

де $P_0 = [p_{01}, \ldots, p_{0N}] \in \mathrm{R}^{1\times N}$, $p_{0i} > 0$, $i = \overline{1, N}$.

Набору підсистем S_i, $i = \overline{1, N}$ ставиться у відповідність лінійна система порівняння, яка обумовлена різницевими рівняннями:

$$\upsilon(k+1)=\Lambda(k)\,\upsilon(k), \quad \upsilon(0)=V\left(\xi(0)-\xi^*\right),$$
$$\eta(k)=P_0\,\upsilon(k), \tag{45}$$

де $\upsilon(k)\in \mathrm{R}^N$ – вектор станів; $\eta(k)$ – скалярний вихід системи порівняння; $\Lambda(k)\in \mathrm{R}^{N\times N}$ – нестаціонарна матриця динаміки з невід'ємними елементами.

Квадратичні форми $v_i\left(A_{f\,i}(\theta_i,k)\left(\xi_i(k)-\xi_i^*\right)\right)$ і $v_i\left(\xi_i(k)-\xi_i^*\right)$ визначають пучок форм $v_i\left(A_{f\,i}(\theta_i,k)\left(\xi_i(k)-\xi_i^*\right)\right)-\mu v_i\left(\xi_i(k)-\xi_i^*\right)$, де μ – деякий параметр. Аналогічно квадратичні форми $v_i\left(F_{ij}\left(\xi_j(k)-\xi_j^*\right)\right)$ і $v_j\left(\xi_j(k)-\xi_j^*\right)$ визначають пучок форм $v_i\left(F_{ij}\left(\xi_j(k)-\xi_j^*\right)\right)-\mu v_j\left(\xi_j(k)-\xi_j^*\right)$. Обчислення елементів матриці $\Lambda(k)$ здійснюється за характеристичними рівняннями пучків квадратичних форм:

$$\det\left(A_{f\,i}^{\mathrm{T}}(\theta_i,k)P_i(\theta_i,k)A_{f\,i}(\theta_i,k)-\mu_{ii}P_i(\theta_i,k)\right)=0,\ i=\overline{1,N},$$
$$\det\left(F_{ij}^{\mathrm{T}}(k)P_i(\theta_i,k)F_{ij}(k)-\mu_{ij}P_j(\theta_j,k)\right)=0,\ i,j=\overline{1,N},\ \ j\neq i,$$

де $[\Lambda(k)]_{ij}=\left(\mu_{ij}^{\max}(k)\right)^{1/2}$; $\mu_{ij}^{\max}(k)$ – максимальне значення кореня відповідного рівняння. Тоді для векторної (43) і модульної (44) функцій Ляпунова мережі поставок S виконуються нерівності:

$$V\left(\xi(k)-\xi^*\right)\leq \upsilon(k), \quad V_0\left(\xi(k)-\xi^*\right)\leq \eta(k),$$

тобто система порівняння (45) покомпонентно мажорірує векторну і модульну функції Ляпунова, побудовані для системи S. В результаті аналіз стійкості децентралізованої системи керування запасами в мережі поставок S зводиться до аналізу стійкості лінійної позитивної системи порівняння (45).

При побудові моделі мережі поставок вузли нумеруються і групуються відповідно до стадій переробки сировини і напівфабрикатів, починаючи з тих, на які надходить зовнішній попит. Тоді, якщо граф мережі не має циклів, то матриця динаміки $\Lambda(k)$ системи порівняння є нижньотрикутною. Оскільки локальні підсистеми після замикання є стабілізованими, то значення діагональних елементів матриці $\Lambda(k)$ є додатними і менше одиниці: $0<[\Lambda(k)]_{ii}<1$. В результаті $\Lambda(k)$ $\forall k$ є нільпотентною і, таким чином, система порівняння (45) є стійкою. У підсумку керована мережа поставок S, яка складається з взаємозв'язаних підсистем $S_i, i=\overline{1,N}$, замкнутих локальними зворотними зв'язками з децентралізованими регуляторами (41), є стійкою за Ляпуновим.

Шостий розділ присвячений аналізу необхідних і достатніх умов, за яких задача синтезу обмеженого робастного гарантуючого керування запасами в мережах поставок має розв'язок. До таких умов відносяться:

1) умова керованості пар матриць $(A^{(j)},B)$, $j=\overline{1,L}$;

2) умова достатності ресурсів керування, яка допускає наступну інтерпретацію в термінах теорії множин: опуклий багатогранник, що описує вплив зовнішніх збурень, повинен знаходитися суворо всередині опуклого багатогранника, що описує обмеження на ресурси керування.

Задача перевірки умови 2 є NP-складною і потребує вирішення сукупності задач лінійного програмування, кількість яких дорівнює 2^{q+m}. F. Blanchini та ін. запропоновано обчислювальний алгоритм, який для конкретної моделі визначає чи є потужність керованих потоків достатньою, щоб при будь-якому допустимому зовнішньому попиті не виник дефіцит ресурсів. Однак, алгоритм не дозволяє обчислити мінімальні допустимі значення керуючих впливів, при яких виконується умова достатності ресурсів.

На практиці до регуляторів і перехідних процесів в замкнутих системах пред'являються певні інженерні вимоги. Однією з найбільш значущих є вимога врахування обмеженості ресурсу керування. Специфікою задач керування запасами є невід'ємність значень змінних, тому в роботі застосовано лінійне керування з несиметричними обмеженнями, яке визначено лише в деякій обмеженій області фазового простору. Така постановка задачі дозволила безпосередньо застосувати техніку ЛМН і отримати прості обчислювальні алгоритми. Результат розв'язання задачі оцінювання допустимої області в просторі керуючих впливів є таким: якщо для системи (9) вектор $\hat{u}^{\max}$ є розв'язком оптимізаційної задачі

$$e_m u^{\max} \to \min \tag{46}$$

при обмеженнях (19) – (21), де мінімізація здійснюється за матричними змінними $Q(k) = Q^{\mathrm{T}}(k) \in \mathrm{R}^{N\times N}$, $Y(k) \in \mathrm{R}^{m\times N}$ і скаляром $\alpha(k)$, тоді при $u^{\max} \geq \hat{u}^{\max}$, де порівняння виконується поелементно, для системи (9) існує стабілізуючий регулятор виду (8) при обмеженнях (2).

Відзначено, що друга з матричних нерівностей (21) в цьому випадку є білінійною, оскільки містить добуток матричної $Y^{\mathrm{T}}(k)$ і векторної $u^{\max}$ змінних. Тому для розв'язання задачі запропоновано ітераційний алгоритм.

1. Ініціалізація:

– задати початкові значення вектору граничних керуючих впливів $u_0^{\max}$;

– встановити максимальну кількість ітерацій *iter* і величину помилки δ;

– встановити номер ітерації $j \leftarrow 0$.

2. Встановити $j \leftarrow j+1$. Знайти значення матриць $Q_j(k)$, $Y_j(k)$ і скаляра $\alpha_j(k)$ шляхом розв'язання задачі (22) при обмеженнях (19) – (21), використовуючи значення $u_{j-1}^{\max}$. Знайти значення компонент вектору $u_j^{\max}$ шляхом розв'язання задачі (47) при обмеженнях $u_j^{\max} - u_{j-1}^{\max} \preceq 0$ і (21), використовуючи значення матриць $Q_j(k)$, $Y_j(k)$ і скаляра $\alpha_j(k)$, отримані на кроці 2.

3. Перевірити виконання умов критерію зупинення $(j \geq iter)$ або $\left(\left\|u_j^{\max} - u_{j-1}^{\max}\right\| / \left\|u_j^{\max}\right\| \leq \delta\right)$ та, якщо вони не виконані, повторити крок 2, використовуючи знайдені значення $u_j^{\max}$. В іншому випадку перервати алгоритм.

Якщо пари матриць $(A^{(j)}, B)$, $j = \overline{1, L}$ є керованими і початкові значення вектору $u_0^{\max}$ обрані так, що виконується умова достатності ресурсів керування, то задача (22) при обмеженнях (19) – (21) має розв'язок. Чисельними розрахунками доведено, що задача (46) при обмеженнях $u_j^{\max} - u_{j-1}^{\max} \preceq 0$ і (21) також має розв'язок і, отже, запропонований алгоритм сходиться.

Розмір інваріантного еліпсоїда замкнутої системи залежить від вагових матриць W_ξ і W_u, які визначають критерій якості (6). Чим більша сума значень сліду матриць, тим більша швидкість убування відповідної функції Ляпунова і, отже, менше розмір інваріантного еліпсоїда замкнутої системи. Оскільки однією з цілей керування є подавлення впливу зовнішнього попиту на рівні запасу ресурсів у вузлах мережі, то виникає задача обчислення максимальних значень діагональних елементів вагових матриць W_ξ і W_u, при яких оптимізаційна задача, в результаті вирішення якої визначаються параметри інваріантного еліпсоїда, має розв'язок. Результат розв'язання вказаної задачі є таким: якщо матриці $\hat{W}_\xi \succ 0$ і $\hat{W}_u \succ 0$ є розв'язком оптимізаційної задачі

$$\operatorname{tr} W_\xi + \operatorname{tr} W_u \to \max$$

при обмеженнях (19) – (21) на матричні змінні $Q(k) \in \mathrm{R}^{N \times N}$, $Y(k) \in \mathrm{R}^{m \times N}$, $W_\xi \in \mathrm{R}^{N \times N}$, $W_u \in \mathrm{R}^{m \times m}$ і скаляр $\alpha(k)$, а вектор $u^{\max}$ задовольняє умові достатності ресурсів керування, тоді регулятор (8): 1) стабілізує систему (9) з матричною невизначеністю (4), причому уздовж всієї траєкторії системи виконані обмеження (2); 2) оптимально в сенсі критерію (6) з отриманими матрицями $\hat{W}_\xi$, $\hat{W}_u$ подавляє вплив зовнішніх збурень $d(k) \in E(d^*, Q_d)$ на виходи системи (9).

Відзначено, що кожна з матричних нерівностей (19) в цьому випадку є білінійною, оскільки містить добуток матричних змінних $Q(k)$ і W_ξ, а також $Y^{\mathrm{T}}(k)$ і W_u. Тому для обчислення максимальних допустимих значень вагових матриць критерію якості керування запропоновано ітераційний алгоритм, подібний розглянутому вище, який, строго кажучи, не гарантує збіжності рішення. Однак, подібний підхід добре зарекомендував себе при чисельному моделюванні практичних задач дисертаційної роботи.

Сьомий розділ присвячений застосуванню розробленої методики синтезу обмеженого робастного гарантуючого керування для вирішення задачі автоматизації керування режимами роботи насосних станцій в системі централізованого водопостачання в умовах невизначеності обсягів споживання води, а також наявності експлуатаційних обмежень.

Одним з різновидів мереж поставок є системи подачі та розподілу води (СПРВ) у населених пунктах. Проблема автоматизації керування СПРВ для міста Харків стоїть особливо гостро. Передумовами є територіальне розташування міста у відносно маловодному районі та великі об'єми водоспоживання. В даний час у більшості випадків керування СПРВ здійснюється за допомогою «історично сформованих» стратегій, які є результатом багаторічного емпіричного досвіду. Безумовно, ці стратегії є адекватними, однак вони не гарантують оптимальності керування. У зв'язку з цим важливою є задача розробки оптимальних стратегій керування системами водопостачання, в основі яких лежать математичні моделі роботи мережі та методи сучасної теорії керування.

Характерними особливостями СПРВ є складна великомасштабна архітектура системи, а також необхідність забезпечення певного тиску води, значення якого нелінійно залежить від обсягу перекачуваної насосами води, що призводить до необхідності використання нелінійних моделей.

В якості змінних станів моделі СПРВ розглядаються обсяги води в резервуарах, вимірювані в м^3, і величини тиску (напору) води в трубах, вимірювані в метрах, які визначають висоту відповідного стовпа води. Керуючими впливами є обсяги води, які перекачуються через керовані гідравлічні елементи (насоси та вентилі) у поточному періоді, вимірювані в м^3. В якості зовнішніх збурень виступають обсяги споживаної води та витоків за період, також вимірювані в м^3.

Передбачається, що структура СПРВ є відомою, а обсяги води в резервуарах можуть бути безпосередньо виміряні. Для кожного вузла мережі записується рівняння балансу маси у вигляді різницевого рівняння, що враховує всі вхідні і вихідні потоки. Зв'язок між обсягом перекачуваної води і напором води визначається рівнянням Бернуллі, яке виражає закон збереження механічної енергії в рідині та може бути записано для будь-яких двох вузлів мережі по ходу потоку з урахуванням їх відносної висоти розташування. Це дозволяє врахувати характер рельєфу місцевості, на якій розташована СПРВ, оскільки для систем водопостачання характерним є перетікання води між вузлами мережі під дією сили тяжіння. Нелінійні доданки представлено двома функціями: перша $f_u(k,u):\mathrm{R}^{m+1}\to\mathrm{R}^n$ залежить від дискретного часу і вектора керуючих дій, друга $f_d(k,d):\mathrm{R}^{q+1}\to\mathrm{R}^n$ – від дискретного часу і вектора зовнішніх збурень, де n – кількість резервуарів в системі; m – кількість керованих гідравлічних елементів, q – кількість секторів споживання. Остаточно математичну модель СПРВ представлено у вигляді нелінійної дискретної моделі з запізненням у просторі станів. Після приведення до стандартного виду без запізнення рівняння розширеної моделі мають вигляд:

$$\xi(k+1)=A\xi(k)+Bu(k)+Gd(k)+f_u(k,u)+f_d(k,d),\quad x(k)=C\xi(k), \tag{47}$$

де $\xi(k)=\left[v^{\mathrm{T}}(k),h^{\mathrm{T}}(k),u^{\mathrm{T}}(k-1),\ldots,u^{\mathrm{T}}(k-\Lambda)\right]^{\mathrm{T}}\in\mathrm{R}^{2n+\Lambda m}$ – вектор станів; $v(k)\in\mathrm{R}^n$ – вектор, компоненти якого визначають обсяги води в резервуарах в момент часу k; $h(k)\in\mathrm{R}^n$ – вектор, компоненти якого визначають напор води в контрольних точках; матриці моделі мають відповідну блокову структуру.

Обсяги споживаної води і витоків передбачаються невідомими, але обмеженими. Резервуари та виконавчі елементи СПРВ мають експлуатаційні обмеження. У відповідності до «Будівельних норм і правил» тиск в міських водопровідних мережах повинен змінюватися в межах від 2,5 до 7,5 атмосфер, що відповідає напору води від 25 до 75 метрів. Тому в процесі функціонування СПРВ повинні виконуватися обмеження, які аналогічні (2). Відмінність полягає в тому, що вектор нижніх граничних значень $x^{\min}$ не є нульовим, оскільки обсяги води в резервуарах не повинні опускатися нижче заданих значень.

Передбачається, що нелінійні функції є обмеженими та задовольняють квадратичним нерівностям, які мають вигляд:

$$f_u^{\mathrm{T}}(k,u)\, f_u(k,u) \le u^{\mathrm{T}}(k)\Sigma_u^{\mathrm{T}} F^{\mathrm{T}} F \Sigma_u u(k), \quad f_d^{\mathrm{T}}(k,d)\, f_d(k,d) \le d^{\mathrm{T}}(k)\Sigma_d^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} H \Sigma_d d(k), \quad (48)$$

де $F^{\mathrm{T}} = \left[O_{n\times m}^{\mathrm{T}} \;\vdots\; \mathrm{diag}(F_1,\ldots,F_m)^{\mathrm{T}} \;\vdots\; O_{(n-m)\times m}^{\mathrm{T}} \;\vdots\; O_{\Lambda m\times m}^{\mathrm{T}} \right]$; $H^{\mathrm{T}} = \left[O_{n\times q}^{\mathrm{T}} \;\vdots\; \mathrm{diag}(H_1,\ldots,H_q)^{\mathrm{T}} \;\vdots\; O_{(n-q)\times q}^{\mathrm{T}} \;\vdots\; O_{\Lambda m\times q}^{\mathrm{T}} \right]$; $F_i = \dfrac{8\alpha_K \rho}{\pi^2 D_i^4}$, $i=\overline{1,m}$; $H_j = -\dfrac{8\alpha_K \rho}{\pi^2 D_j^4}$, $j=\overline{1,q}$; α_K – коефіцієнт Коріоліса; ρ – щільність води; D_i – діаметр труби, яка виходить із резервуара i; $\Sigma_u = \mathrm{diag}\left(u_1^{\max},\ldots,u_m^{\max}\right)$; $\Sigma_d = \mathrm{diag}\left(d_1^{\max},\ldots,d_q^{\max}\right)$.

Регулювання потужності насосів повинно здійснюватися плавно, щоб уникнути небажаних перехідних процесів в герметичних трубах. Для забезпечення згладжування стрибків керуючих впливів критерій (6) доповнено доданком

$$J_{\infty}^{дод}(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta u^{\mathrm{T}}(k) W_{\Delta} \Delta u(k), \quad \Delta u(k) = u(k) - u(k-1), \quad u(-1) = O_{m\times 1}, \quad (49)$$

де $W_{\Delta} \in \mathrm{R}^{m\times m}$ – додатно визначена діагональна вагова матриця.

Для системи (47) з обмеженнями (2), (48) здійснено постановку задачі синтезу стабілізуючого керування режимами роботи насосних станцій гарантованої вартості, яка визначає в кожен момент часу обсяги перекачуваної води у вигляді функції від обсягів води в резервуарах мережі та значень напору води так, щоб утримувати обсяги води в резервуарах і величини напору води в заданих межах при будь-яких допустимих обсягах споживання та витоків води.

Закон керування будується у вигляді лінійного динамічного зворотного зв'язку за станом (8), де вектор ξ^* страхових запасів води обчислюється за допомогою продуктивної моделі Леонтьєва на підставі граничних значень обсягів споживання з урахуванням витрат часу на транспортування води:

$$\xi^* = \Big[v^{*\mathrm{T}}, O_{1\times n}, \underbrace{v^{*\mathrm{T}},\ldots,v^{*\mathrm{T}}}_{\Lambda} \Big]^{\mathrm{T}}, \; v_i^* = \begin{cases} (I_n - \Pi)^{-1}\hat{d}, & i=\overline{1,q}, \\ \Lambda_i (I_n - \Pi)^{-1}\hat{d}, & i=\overline{q+1,n}, \end{cases} \; \hat{d}_i = \begin{cases} \Lambda_i d_i^{\max} + x_i^{\min}, & i=\overline{1,q}, \\ x_i^{\min}, & i=\overline{q+1,n}, \end{cases} \quad (50)$$

де $\Pi \in \mathrm{R}^{n\times n}$ – матриця суміжності графа, який описує модель СПРВ.

Квадратична функція Ляпунова, побудована на рішеннях системи (47), замкнутої керуванням (8), має вигляд (10), де матриця Ляпунова відповідає (16). Тоді оцінка першої різниці по k функції Ляпунова має вигляд

$$\Delta V\left(\xi(k) - \xi^*\right) \le -\left(\left(\xi(k) - \xi^*\right)^{\mathrm{T}} W_{\xi} \left(\xi(k) - \xi^*\right) + u^{\mathrm{T}}(k) W_u u(k) + \Delta u^{\mathrm{T}}(k) W_{\Delta} \Delta u(k) \right). \quad (51)$$

З урахуванням ущербності *S*-процедури при трьох обмеженнях зазначено, що для виконання нерівностей (51), (48) і (17), які представлено у вигляді квадратичних форм щодо складеного вектору $s(k) \in \mathrm{R}^{5N+3q}$, де $N = 2n + \Lambda m$,

$$s(k) = \left[\left(\xi(k) - \xi^*\right)^{\mathrm{T}}, \left(\xi(k-1) - \xi^*\right)^{\mathrm{T}}, \xi^{*\mathrm{T}}, f_u^{\mathrm{T}}(k,u), f_d^{\mathrm{T}}(k,d), d^{\mathrm{T}}(k), d^{*\mathrm{T}}, \left(d(k) - d^*\right)^{\mathrm{T}} \right]^{\mathrm{T}},$$

достатньою умовою є виконання для деяких скалярів $\alpha_1(k) > 0$, $\alpha_2(k) > 0$ і $\alpha_3(k) > 0$ наступних ЛМН:

$$\begin{bmatrix}
Q(k) & Y^{\mathrm{T}}(k)W_{\Delta}K_{k-1} & O_{N\times N} & O_{N\times N} & O_{N\times N} & O_{N\times q} & O_{N\times N} & O_{N\times q} & O_{N\times q} & \Phi^{\mathrm{T}}(k) & O_{N\times q} & Q(k)W_{\xi} & Y^{\mathrm{T}}(k)W_{\Sigma} & \Psi^{\mathrm{T}}(k) \\
* & -K_{k-1}^{\mathrm{T}}W_{\Delta}K_{k-1} & O_{N\times N} & O_{N\times N} & O_{N\times N} & O_{N\times q} & O_{N\times N} & O_{N\times q} & O_{N\times q} & O_{N\times N} & O_{N\times q} & O_{N\times N} & O_{N\times m} & O_{N\times N} \\
* & * & O_{N\times N} & O_{N\times N} & O_{N\times N} & O_{N\times q} & O_{N\times N} & O_{N\times q} & O_{N\times q} & (A-I_N)^{\mathrm{T}} & O_{N\times q} & O_{N\times N} & O_{N\times m} & O_{N\times N} \\
* & * & * & \alpha_1(k)I_N & O_{N\times N} & O_{N\times q} & O_{N\times N} & O_{N\times q} & O_{N\times q} & \alpha_1(k)I_N & O_{N\times q} & O_{N\times N} & O_{N\times m} & O_{N\times N} \\
* & * & * & * & \alpha_2(k)I_N & O_{N\times q} & O_{N\times N} & O_{N\times q} & O_{N\times q} & \alpha_2(k)I_N & O_{N\times q} & O_{N\times N} & O_{N\times m} & O_{N\times N} \\
* & * & * & * & * & O_{q\times q} & (H\Sigma_d)^{\mathrm{T}} & O_{q\times q} & O_{q\times q} & O_{q\times N} & O_{q\times q} & O_{q\times N} & O_{q\times m} & O_{q\times N} \\
* & * & * & * & * & * & \alpha_2(k)I_N & O_{N\times q} & O_{N\times q} & O_{N\times N} & O_{N\times q} & O_{N\times N} & O_{N\times m} & O_{N\times N} \\
* & * & * & * & * & * & * & O_{q\times q} & O_{q\times q} & G^{\mathrm{T}} & O_{q\times q} & O_{q\times N} & O_{q\times m} & O_{q\times N} \\
* & * & * & * & * & * & * & * & O_{q\times q} & G^{\mathrm{T}} & O_{q\times q} & O_{q\times N} & O_{q\times m} & O_{q\times N} \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & Q(k) & GQ_d^{1/2} & O_{N\times N} & O_{N\times m} & O_{N\times N} \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \alpha_3(k)I_q & O_{q\times N} & O_{q\times m} & O_{q\times N} \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & W_{\xi} & O_{N\times m} & O_{N\times N} \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & W_{\Sigma} & O_{m\times N} \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \alpha_1(k)I_N
\end{bmatrix} \succeq 0, \tag{52}$$

$$\alpha_1(k) > 0, \quad \alpha_2(k) > 0, \quad \alpha_3(k) > 0, \quad Q(k) \succ 0, \tag{53}$$

де $\Phi(k) = AQ(k) + BY(k)$, $\Psi(k) = F\Sigma_u Y(k)$, $W_{\Sigma} = W_u + W_{\Delta}$, $K_{k-1} = K(k-1)$, $K(0) = O_{m\times N}$, «*» – відповідний елемент симетричної матриці нерівності.

Остаточно результат розв’язання задачі синтезу обмеженого стабілізуючого керування режимами роботи насосних станцій гарантованої вартості в системі подачі та розподілу води є таким: якщо для системи (47) з обмеженнями (2), (48), яка замкнена керуванням (8), матриці $\hat{Q}(k)$, $\hat{Y}(k)$ отримано в результаті розв’язання оптимізаційної задачі (22) при обмеженнях (20), (21), (52), (53) на матричні змінні $Q(k) = Q^{\mathrm{T}}(k) \in \mathrm{R}^{N\times N}$, $Y(k) \in \mathrm{R}^{m\times N}$ і скалярні параметри $\alpha_1(k)$, $\alpha_2(k)$, $\alpha_3(k)$, то: 1) для будь-якого початкового стану $v(0) \geq v^*$, $h^{\min} \leq h(0) \leq h^{\max}$, $u(k) = O_{m\times 1}$ $\forall k \leq 0$, а також допустимого зовнішнього збурення $d(k) \in E(d^*, Q_d)$ замкнута система є асимптотично стійкою; 2) серед усіх лінійних керувань виду (8) регулятор з матрицею (23) доставляє мінімум за критерієм сліду матриці інваріантному еліпсоїду замкнутої системи в момент k.

В якості прикладу досліджено фрагмент СПРВ міста Харків, зображений на рис. 4. Система складається з наземного джерела; трьох насосних станцій u_2, u_4, u_5; двох підкачувальних насосів u_1, u_3;

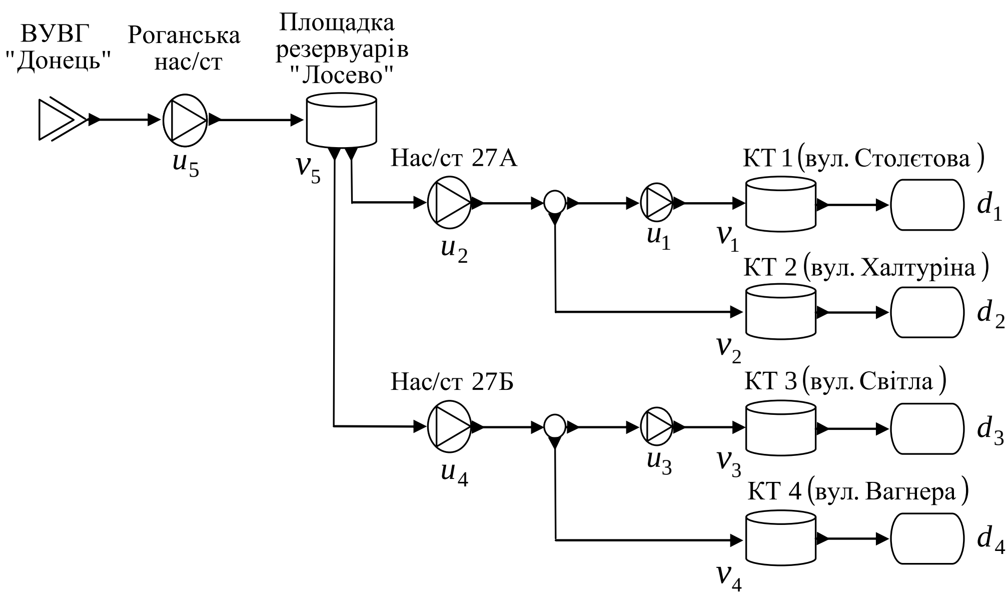


Рисунок 4 – Фрагмент СПРВ міста Харків

п’яти резервуарів ($v_1 - v_5$) і чотирьох секторів споживання ($d_1 - d_4$). Період дискретизації дорівнює 1 годині. Задано значення інтервалів часу, який потрібен для перекачування води $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = \Lambda_4 = 1$, $\Lambda_5 = 3$. Розмірність розширеної моделі СПРВ $N = 25$. Задано граничні значення обсягів води в резервуарах $v^{\min} = [50; 50; 50; 50; 300]^{\mathrm{T}}$, $v^{\max} = [500; 750; 500; 750; 6000]^{\mathrm{T}}$ і максимальні потужності насосів $u^{\max} = [200; 300; 150; 250; 550]^{\mathrm{T}}$, а також відносні висоти розташування резервуарів, насосів і секторів споживання. Відомі граничні значення обсягів споживання води $d^{\min} = [150; 58; 110; 36]^{\mathrm{T}}$, $d^{\max} = [182; 92; 146; 64]^{\mathrm{T}}$.

В якості початкового стану мережі обрано значення страхових запасів, обчислені відповідно до (50), $v(0) = v^* = [232; 374; 196; 310; 2952]^{\mathrm{T}}$. Значення елементів діагональних вагових матриць дорівнюють $[W_\xi]_{ii} = 60, i = \overline{1,25}$, $[W_u]_{jj} = 0{,}85$, $j = \overline{1,5}$, $[W_\Delta]_{ll} = 1, l = \overline{1,5}$.

Моделювання здійснено протягом 24 періодів, що відповідає добі. Для врахування добових коливань значення обсягів споживаної води моделюються як нормально розподілені випадкові величини зі змінним середнім значенням. Результати моделювання для резервуара 1, отримані шляхом чисельного вирішення послідовності задач (22) при обмеженнях (20), (21), (52), (53), де матриця регулятора відповідає (23), представлені на рис. 5.

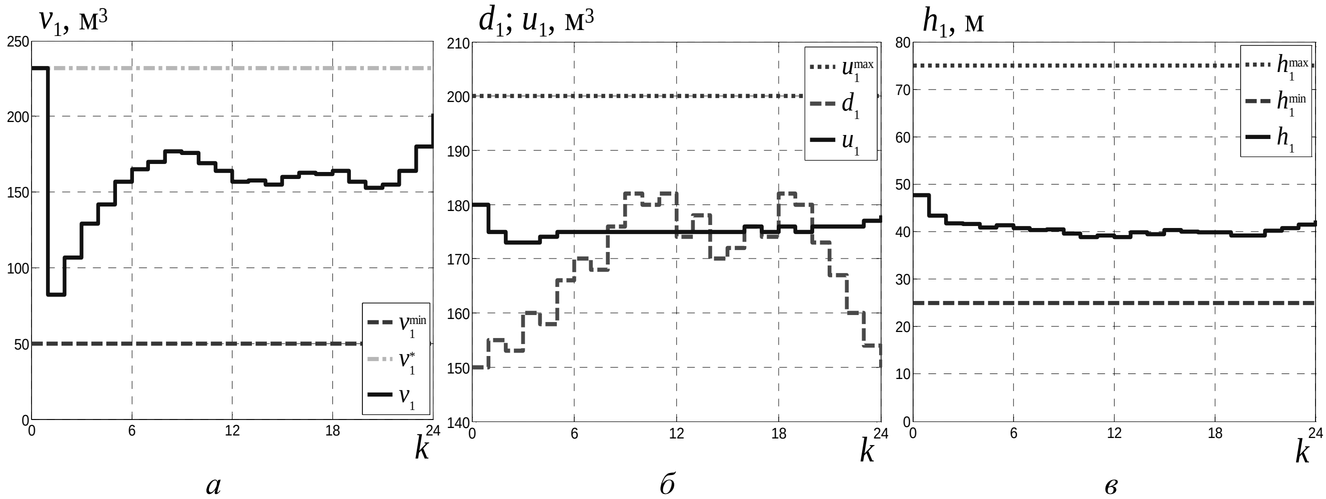


Рисунок 5 – Графіки перехідних процесів для резервуара 1:
а – значення граничного, страхового та наявного обсягів води; *б* – значення обсягів спожитої води і води, перекачаної насосом; *в* – значення напору води в трубах

Аналіз отриманих результатів дозволяє зробити висновок про ефективність запропонованого підходу, оскільки значення обсягів та напору води в умовах стохастично змінюваних обсягів споживання задовольняють заданим експлуатаційним обмеженням, а обсяги перекачуваної води не перевищують максимальних потужностей насосів.

У **додатку** наводяться матеріали щодо впровадження результатів дисертаційної роботи.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі поставлено і розв'язано науково-практичну проблему розробки та обґрунтування концепції та методів синтезу автоматизованих систем робастного керування запасами в мережах поставок на основі розроблених математичних моделей систем з параметричною невизначеністю афінного типу та розвитку методу інваріантних еліпсоїдів з використанням дескрипторного підходу та параметризованої функції Ляпунова.

Отримані наукові та практичні результати дозволяють сформулювати такі висновки.

1. Проведено аналіз методів математичного моделювання керованих мереж поставок, який виявив переваги динамічних моделей та показав необхідність застосування методів теорії автоматичного керування. Виконано аналіз підходів до вирішення задач керування запасами в мережах поставок в умовах невизначеності, що дозволило виявити перспективні можливості концепції синтезу автоматизованих систем робастного керування запасами в мережах поставок на основі методів прогнозуючого керування та інваріантних еліпсоїдів. Встановлено, що ефективність застосування прогнозуючого керування запасами залежить від величини горизонту прогнозування та точності прогнозування попиту. В умовах невизначеного, але обмеженого попиту запропоновано побудову системи керування на основі періодичної перевірки рівнів запасів у вигляді лінійного динамічного зворотного зв'язку за сигналом нев'язки між готівковими та страховими рівнями запасу ресурсів.

2. Розроблено математичну модель процесу керування запасами в мережі поставок у вигляді дискретної динамічної системи з запізненням у просторі станів з урахуванням інтервальної невизначеності зовнішнього попиту. На основі розширення простору станів побудовано модель без запізнення. Обґрунтовано доцільність використання матриці динаміки моделі з параметричною невизначеністю афінного типу, що дозволяє врахувати невизначеність інтервалів транспортних запізнень.

3. Розроблено концепцію та метод синтезу обмеженого робастного гарантуючого керування запасами в мережах поставок на основі методу інваріантних еліпсоїдів, що дозволило звести задачу синтезу регулятора до пошуку найменшого інваріантного еліпсоїда замкнутої системи. Запропонований підхід забезпечує оптимальне подавлення впливу зовнішнього попиту на рівні запасу ресурсів у вузлах мережі, робастну стійкість замкнутої системи при заданих обмеженнях, а також гарантоване значення показника якості керування. Для зменшення ступеня консерватизму результатів керування застосовано дескрипторний підхід із використанням параметризованої функції Ляпунова. За допомогою техніки лінійних матричних нерівностей задачу синтезу регулятора зведено до послідовності задач напіввизначеного програмування, які чисельно розв'язуються в реальному часі, що є основою побудови ефективних систем керування запасами.

4. Розроблено метод синтезу децентралізованого робастного керування запасами в мережах поставок, який базується на декомпозиції мережі на сукуп-

ність локальних підсистем, які є децентралізованими за входами, з подальшим вирішенням задач робастної стабілізації підсистем. Вирішено задачу аналізу робастної стійкості децентралізованої системи керування запасами, яку на основі методу порівняння та методу векторних функцій Ляпунова зведено до задачі перевірки умови нільпотентності нестаціонарної матриці динаміки позитивної системи порівняння.

5. Проведено аналіз умов існування розв’язку задачі синтезу обмеженого робастного гарантуючого керування запасами в мережах поставок, сформульовано необхідні і достатні умови існування допустимого керування для розглянутої задачі. Для формалізації умови достатності ресурсів керування задачу оцінювання допустимої області в просторі керуючих впливів представлено у вигляді системи білінійних матричних нерівностей, для вирішення якої запропоновано ітераційний алгоритм. Задачу обчислення значень вагових матриць критерію якості керування, при яких забезпечується мінімальний розмір інваріантного еліпсоїда замкнутої системи, зведено до задачі вирішення системи білінійних матричних нерівностей. Розв’язок останньої дозволяє забезпечити максимально можливу точність стабілізації страхових рівнів запасів ресурсів.

6. На основі результатів комп’ютерного моделювання виконано аналіз впливу початкових умов, величини інтервалу невизначеності зовнішнього попиту і різних способів побудови регулятора на значення показника якості систем робастного керування запасами в мережах поставок, в результаті чого сформульовано рекомендації щодо вибору початкових рівнів запасів. Здійснено порівняння отриманих величин показника якості керування та обчислювальної складності відповідних оптимізаційних задач, що дозволяє рекомендувати застосування для синтезу систем робастного керування запасами дескрипторного підходу з використанням параметризованої функції Ляпунова.

7. На основі різницевих рівнянь балансу маси водних потоків і рівняння Бернуллі побудовано математичну модель системи подачі та розподілу води як об’єкта автоматичного керування у вигляді сукупності лінійних підсистем керування запасами води окремих секторів споживання з нелінійними взаємозв’язками за умови існування квадратичних обмежень на їх значення. Розроблено програмно-алгоритмічний комплекс для вирішення задачі автоматизованого керування режимами роботи насосних станцій в системі централізованого водопостачання населеного пункту, яку на основі методу інваріантних еліпсоїдів зведено до послідовності задач напіввизначеного програмування, що чисельно розв’язуються в реальному часі.

8. Результати дисертації впроваджено в КП «Харківводоканал», ТзОВ Компанії «СВ», а також використовуються у навчальному процесі кафедри системного аналізу і управління Національного технічного університету «ХПІ».

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Дорофеев Ю. И. Математическая модель управляемой сети поставок / Ю. И. Дорофеев, Л. М. Любчик // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». – Харків : НТУ «ХПІ», 2009. – № 43. – С. 108-114.

Здобувачем запропоновано методику побудови матриць, які визначають дискретну модель керованої мережі поставок у просторі станів.

2. Дорофеев Ю. И. Анализ распределенных сетей поставок как объектов автоматического управления / Ю. И. Дорофеев, А. А. Никульченко // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». – Харків : НТУ «ХПІ», 2012. – № 29. – С. 15-22.

Здобувач проаналізував переваги та недоліки «розширеної» та «миттєвої» моделей мереж поставок для задач керування запасами.

3. Дорофеев Ю. И. Прогнозирующее управление сетями поставок в условиях неопределенности внешнего спроса с использованием «мягких» ограничений / Ю. И. Дорофеев, А. С. Куценко, Л. М. Любчик, А. А. Никульченко // Інформатика та математичні методи в моделюванні. – Одеса : ОНПУ, 2012. – Том 2. – № 4. – С. 319-330.

Здобувач формалізував задачу прогнозуючого керування запасами в мережах поставок за умови порушень обмежень на значення станів.

4. Дорофеев Ю. И. Построение математических моделей управляемых сетей поставок с учетом запаздываний потоков / Ю. И. Дорофеев, А. А. Никульченко // Системні дослідження та інформаційні технології. – К. : ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», 2013. – № 1. – С. 16-27.

Здобувачем розроблено програмну реалізацію алгоритму перевірки умови достатності ресурсів керування.

5. Дорофеев Ю. И. Прогнозирующее управление распределенными сетями поставок в условиях неопределенности спроса / Ю. И. Дорофеев, Л. М. Любчик, А. А. Никульченко // Керуючі системи та машини. – К. : МНУЦІТіС, 2013. – № 6. – С. 78-87.

Здобувач формалізував та розв’язав задачу локально-оптимального прогнозуючого керування запасами в мережах поставок.

6. Дорофеев Ю. И. Стабилизирующее управление запасами в сетях поставок со структурными ограничениями в условиях неопределенного стохастического спроса / Ю. И. Дорофеев, А. С. Куценко // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». – Харків : НТУ «ХПІ», 2013. – № 62(1035). – С. 3-14.

Здобувачем формалізована та розв’язана задача стабілізуючого керування запасами в мережах поставок за умов стохастичного попиту.

7. Дорофеев Ю. И. Робастное стабилизирующее управление запасами в сетях поставок в условиях неопределенности внешнего спроса и интервалов задержки пополнения запасов / Ю. И. Дорофеев, Л. М. Любчик, А. А. Никульченко // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2014. – № 5. – С. 146-160.

Здобувач запропонував методику побудови матриці динаміки моделі мережі поставок з параметричною невизначеністю афінного типу.

8. Dorofieiev Yu. I. Robust stabilizing inventory control in supply networks under uncertainty of external demand and supply time-delays / Yu. I. Dorofieiev, L. M. Lyubchyk, A. A. Nikulchenko // Journal of Computer and Systems Sciences International. – 2014. – Vol. 53. – No. 5. – P. 761-775.

Здобувачем розв’язана задача робастного керування запасами в мережах

поставок в умовах інтервальної невизначеності попиту.

9. Дорофеев Ю. И. Синтез системы оптимального управления запасами с дискретным ПИД-регулятором с использованием линейных матричных неравенств / Ю. И. Дорофеев // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил. – Харків : ХУПС, 2014. – Вип. 4(41). – С. 34-41.

10. Дорофеев Ю. И. Использование дискретного аналога производной вектора состояний в законе управления при синтезе стабилизирующего управления запасами / Ю. И. Дорофеев // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». – Харків : НТУ «ХПІ», 2014. – № 61(1103). – С. 14-23.

11. Дорофеев Ю. И. Робастное подавление возмущений при управлении насосными станциями в системе централизованного водоснабжения / Ю. И. Дорофеев, Л. М. Любчик // Радіоелектроніка, інформатика, управління. – Запоріжжя : ЗНТУ, 2014. – № 2(31). – С. 164-173.

Здобувач розробив математичну модель системи подачі та розподілу води з нелінійними взаємозв'язками між локальними підсистемами.

12. Dorofieiev Yu. I. Subsystem stabilization approach to robust decentralized inventory control in supply networks / Yu. I. Dorofieiev // Системні технології. – Дніпропетровськ : ДНВП «Системні технології», 2014. – № 5(94). – С. 101-113.

13. Дорофеев Ю. И. Подавление влияния ограниченных внешних возмущений в системе управления запасами цепи поставок / Ю. И. Дорофеев // Автоматизація технологічних і бізнес-процесів. – Одеса : ОНАХТ, 2015. – № 20. – С. 113-120.

14. Дорофєєв Ю. І. Оцінювання множин досяжності і тяжіння мереж поставок зі структурними обмеженнями за допомогою інваріантних еліпсоїдів / Ю. І. Дорофєєв // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – Вінниця : ВНТУ, 2015. – № 1(118). – С. 122-128.

15. Дорофеев Ю. И. Применение линейных матричных неравенств в задаче синтеза оптимального управления запасами при наличии структурных ограничений / Ю. И. Дорофеев // Адаптивні системи автоматичного управління. – К. : НТУУ «КПІ», 2015. – Вип. 1(26). – С. 13-25.

16. Дорофеев Ю. И. Робастное управление запасами в сети поставок для производства средств бытовой химии / Ю. И. Дорофеев // Автоматизація технологічних і бізнес-процесів. – Одеса : ОНАХТ, 2015. – № 2. – С. 14-23.

17. Дорофеев Ю. И. Анализ условий разрешимости задачи синтеза ограниченного стабилизирующего управления запасами с помощью билинейных матричных неравенств / Ю. И. Дорофеев // Інформатика та математичні методи в моделюванні. – Одеса : ОНПУ, 2015. – Том 5. – № 2. – С. 177-190.

18. Дорофеев Ю. И. Синтез децентрализованного управления запасами в сетях поставок на основе робастной стабилизации подсистем / Ю. И. Дорофеев // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». – Харків : НТУ «ХПІ», 2015. – № 33(1142). – С. 68-81.

19. Дорофеев Ю. И. Синтез ограниченного робастного гарантирующего управления запасами с помощью параметризованной функции Ляпунова / Ю. И. Дорофеев // Збірник наукових праць Харківського університету

Повітряних Сил. – Харків : ХУПС, 2015. – № 4(45). – С. 142-149.

20. Дорофеев Ю. И. Дескрипторный подход к синтезу ограниченного робастного гарантирующего управления запасами с использованием параметризованной функции Ляпунова / Ю. И. Дорофеев // Радіоелектроніка, інформатика, управління. – Запоріжжя : ЗНТУ, 2015. – № 4(35). – С. 87-95.

21. Дорофеев Ю. И. Задачи и методы ограниченного робастного управления запасами в сетях поставок в условиях неопределенности / Ю. И. Дорофеев // Інтегровані технології та енергозбереження. – Харків : НТУ «ХПІ», 2015. – № 4. – С. 42-61.

22. Дорофеев Ю. И. Математическая модель многоуровневой управляемой сети поставок / Ю. И. Дорофеев, А. А. Никульченко // Автоматика-2010: XVII Міжнар. конф. з автоматичн. управл. – Харків : ХНУРЕ, 2010. – Т. 1. – С. 208-210.

Здобувачем запропоновано методику побудови блокової структури матриць дискретної моделі, які формуються на підставі матриці досяжності.

23. Дорофеев Ю. И. Математическое моделирование распределенных сетей поставок / Ю. И. Дорофеев // Інформатика та системні науки: II Всеукр. наук.-практ. конф. – Полтава : РВВ ПУЕТ, 2011. – С. 90-94.

24. Дорофеев Ю. И. Применение MATLAB для анализа и синтеза систем управления запасами в распределенных сетях поставок / Ю. И. Дорофеев, Д. Ю. Дорофеев, А. А. Никульченко // Проектирование инженерных и научных приложений в среде MATLAB: V Междунар. научн. конф. – Харьков : ФЛП Шейнина Е. В., 2011. – С. 220-230.

Здобувач виконав програмну реалізацію алгоритму керування запасами в середовищі MATLAB у вигляді задачі лінійного програмування.

25. Дорофеев Ю. И. Построение математических моделей управляемых сетей поставок с учетом запаздываний потоков / Ю. И. Дорофеев, А. А. Никульченко // САІТ-2011: XIII Міжнар. наук.-техн. конф. – К. : ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», 2011. – С. 85-86.

Здобувачем побудовано дискретно-подієву модель керованої мережі поставок з урахуванням транспортних запізнень та технологічних обмежень.

26. Дорофеев Ю. И. Локально-оптимальное управление распределенными сетями поставок / Ю. И. Дорофеев, А. А. Никульченко // Автоматика-2011: XVIII Міжнар. конф. з автоматичн. управл. – Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2011. – С. 137-138.

Здобувач запропонував стратегію керування запасами в мережах поставок на підставі методу локально-оптимального керування.

27. Дорофеев Ю. И. Синтез прогнозирующего линейно-квадратичного управления распределенными сетями поставок с помощью линейных матричных неравенств / Ю. И. Дорофеев, А. А. Никульченко // САІТ-2012: XIV Міжнар. наук.-техн. конф. – К. : ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», 2012. – С. 55-56.

Здобувачем запропоновано стратегію керування запасами в мережах поставок на підставі принципу відступаючого горизонту прогнозування.

28. Дорофеев Ю. И. Локально-оптимальное прогнозирующее управление распределенными сетями поставок в условиях возмущений / Ю. И. Дорофеев,

А. А. Никульченко // ММТТ-25: XXV Междунар. науч. конф. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2012. – Т. 1. – С. 111-114.

Здобувач виконав зведення задачі синтезу локально-оптимального керування запасами в мережах поставок до задачі квадратичного програмування.

29. Дорофеев Ю. И. Синтез прогнозирующего управления для распределенных сетей поставок на основе линейных матричных неравенств / Ю. И. Дорофеев, А. А. Никульченко // Автоматика-2012: XIX Міжнар. конф. з автоматичн. управл. – Київ : Видавництво НУХТ, 2012. – С. 32-34.

Здобувач виконав апроксимацію опуклих множин значень зовнішніх збурень та станів еліпсоїдами мінімального об'єму.

30. Dorofieiev Yu. I. Robust model predictive control of constrained supply networks via invariant ellipsoids technique [Електронний ресурс] / Yu. I. Dorofieiev, L. M. Lyubchyk, A. A. Nikulchenko // Proc. IFAC Conf. on Manufacturing Modelling, Management and Control MIM'2013. – 2013. – Режим доступу: http://www.ifac-papersonline.net/Detailed/60351.html.

Здобувачем формалізована задача синтезу робастного керування запасами у вигляді задачі напіввизначеного програмування.

31. Дорофеев Ю. И. Робастные сетевые системы управления запасами в сетях поставок в условиях неопределенности спроса и транспортных запаздываний / Ю. И. Дорофеев, Л. М. Любчик, А. А. Никульченко // Автоматика-2013: XX Міжнар. конф. з автоматичн. управл. – Миколаїв : НУК, 2013. – С. 32-34.

Здобувач запропонував декомпозицію мережі поставок на локальні підсистеми, які є децентралізованими по входах.

32. Дорофеев Ю. И. Робастное стабилизирующее управление насосными станциями в системе водоснабжения: техника инвариантных эллипсоидов / Ю. И. Дорофеев, Л. М. Любчик // САІТ-2014: XVI Міжнар. наук.-техн. конф. – К. : ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», 2014. – С. 83-84.

Здобувачем використано техніку лінійних матричних нерівностей для зведення задачі синтезу керування до задачі напіввизначеного програмування.

33. Дорофеев Ю. И. Робастное стабилизирующее управление в сетях поставок с нелинейными взаимосвязями / Ю. И. Дорофеев, Л. М. Любчик // Автоматика-2014: XXI Міжнар. конф. з автоматичн. управл. – К. : Вид-во НТУУ «КПІ» ВПІ ВПК «Політехніка», 2014. – С. 116-117.

Здобувач запропонував методику представлення несиметричних обмежень на стани і керуючі дії у вигляді лінійних матричних нерівностей.

34. Дорофеев Ю. И. Анализ условий разрешимости задачи синтеза ограниченного стабилизирующего управления запасами с помощью билинейных матричных неравенств / Ю. И. Дорофеев // Автоматика-2015: XXII Міжнар. конф. з автоматичн. управл. – Одеса : ТЕС, 2015. – С. 36-37.

АНОТАЦІЇ

Дорофєєв Юрій Іванович. Робастне керування запасами у мережах поставок в умовах невизначеності попиту та транспортних запізнень. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 05.13.07 – автоматизація процесів керування. – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Харків, 2016 р.

Дисертація присвячена обґрунтуванню та розробці концепції та методів синтезу автоматизованих систем робастного керування запасами в мережах поставок на основі розвитку методу інваріантних еліпсоїдів з використанням дескрипторного підходу і параметризованої функції Ляпунова. Розроблено дискретну математичну модель керованої мережі поставок у просторі станів з використанням матриці динаміки, яка має параметричну невизначеність афінного типу. Закон керування побудовано на основі періодичної перевірки рівнів запасів ресурсів у вигляді лінійного динамічного зворотного зв'язку за сигналом нев'язки між готівковими і страховими рівнями запасів. Для подавлення впливу зовнішнього попиту на рівні запасу ресурсів та забезпечення робастної стійкості замкнутої системи застосовано метод інваріантних еліпсоїдів, який зводить синтез оптимального регулятора до пошуку найменшого інваріантного еліпсоїда замкнутої системи. За допомогою лінійних матричних нерівностей задачу синтезу регулятора зведено до послідовності задач напіввизначеного програмування, які розв'язуються чисельно в реальному часі. Для зменшення ступеня консерватизму результатів керування застосовано дескрипторний підхід з використанням параметризованої функції Ляпунова. Сформульовано необхідні та достатні умови існування допустимого керування для розглянутої задачі. Задача оцінювання допустимої області в просторі керуючих впливів представлена у вигляді системи білінійних матричних нерівностей, для вирішення якої запропоновано ітераційний алгоритм. Побудовано математичну модель системи подачі та розподілу води як об'єкта автоматичного керування, яка відрізняється врахуванням нелінійних взаємозв'язків за умови існування квадратичних обмежень на їх значення. Розв'язано задачу автоматизації керування режимами роботи насосних станцій в системі централізованого водопостачання.

Ключові слова: автоматизована система керування, моделювання об'єктів керування, мережа поставок, робастне керування запасами, метод інваріантних еліпсоїдів, лінійна матрична нерівність, параметризована функція Ляпунова, дескрипторний підхід.

Дорофеев Юрий Иванович. Робастное управление запасами в сетях поставок в условиях неопределенности спроса и транспортных запаздываний. – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 05.13.07 – автоматизация процессов управления. – Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», Харьков, 2016 г.

Диссертация посвящена обоснованию и разработке концепции и методов синтеза автоматизированных систем робастного управления запасами в сетях поставок в условиях неопределенности спроса и транспортных запаздываний на основе развития метода инвариантных эллипсоидов с использованием дескрипторного подхода и параметризованной функции Ляпунова. Построена матема-

тическая модель сети поставок как объекта автоматического управления в условиях неопределенного, но ограниченного спроса с учетом транспортных запаздываний и несимметричных ограничений на уровни запасов и объемы заказов ресурсов. С целью учета неопределенности значений интервалов транспортных запаздываний обоснована необходимость использования матрицы динамики с параметрической неопределенностью аффинного типа. В результате получена дискретная динамическая модель в пространстве состояний, область неопределенности которой представлена выпуклым многогранным множеством.

Закон управления построен на основе периодической проверки уровней запаса ресурсов в виде линейной динамической обратной связи по сигналу рассогласования между наличными и страховыми уровнями запаса. Предложен способ вычисления значений страховых запасов, которые обеспечивают отсутствие дефицита ресурсов при любом варианте реализации неопределенности модели и внешнего спроса. Для подавления влияния возмущений, моделирующих изменения внешнего спроса, на уровни запаса ресурсов одновременно с обеспечением робастной устойчивости замкнутой системы применен метод инвариантных эллипсоидов, который сводит синтез оптимального регулятора к поиску наименьшего инвариантного эллипсоида замкнутой системы. С помощью техники линейных матричных неравенств задача синтеза регулятора сведена к последовательности задач полуопределенного программирования, которые решаются численно в реальном времени. Для уменьшения степени консерватизма результатов управления применен дескрипторный подход с использованием параметризованной функции Ляпунова.

Для решения задачи синтеза децентрализованного управления запасами выполнена декомпозиция сети поставок на совокупность локальных подсистем, которые являются децентрализованными по входам, с последующим решением задач робастной стабилизации подсистем. На основе метода сравнения и метода векторных функций Ляпунова решена задача анализа робастной устойчивости децентрализованной системы управления запасами, которая сведена к задаче проверки условия нильпотентности нестационарной матрицы динамики линейной позитивной системы сравнения.

Сформулированы необходимые и достаточные условия существования допустимого управления для задачи синтеза ограниченного робастного гарантирующего управления запасами в сетях поставок. Задача оценивания допустимой области в пространстве управляющих воздействий представлена в виде системы билинейных матричных неравенств, для решения которой предложен итерационный алгоритм. Задача вычисления значений весовых матриц, определяющих квадратичный критерий качества управления, при которых обеспечивается минимальный размер инвариантного эллипсоида замкнутой системы, сведена к задаче разрешимости системы билинейных матричных неравенств, для решения которой предложен итерационный алгоритм.

Построена математическая модель системы подачи и распределения воды как объекта автоматического управления в виде совокупности линейных подсистем управления запасами воды отдельных секторов потребления с нелинейными взаимосвязями при условии существования квадратичных ограничений

на их значения. Решена задача автоматизации управления режимами работы насосных станций в системе централизованного водоснабжения населеного пункта, которая сведена к последовательности задач полуопределенного программирования, решаемых численно в реальном времени.

Ключевые слова: автоматизированная система управления, моделирование объектов управления, сеть поставок, робастное управление запасами, метод инвариантных эллипсоидов, линейное матричное неравенство, параметризованная функция Ляпунова, дескрипторный подход.

Dorofieiev Yuri Ivanovich. Robust inventory control in supply networks with uncertainty of demand and time-delays. – As manuscript.

The dissertation for the degree of doctor of technical sciences, specialty 05.13.07 – automation of control processes. – The National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv, 2016.

The dissertation is devoted to the development of a concept and synthesis methods of automated systems of robust inventory control in supply networks with uncertainty of demand and time-delays on the basis of extension of the invariant ellipsoids method using the descriptor system approach and parameter-dependent Lyapunov function. A discrete mathematical model in state space of supply network is developed, which has parametric uncertainty of affine type. The control law is based on the periodic inspection of resources stock levels and constructed in the form of a linear dynamic feedback with respect to deviation between cash and safety stock levels of resources. In order to suppress the influence of the changes in external demand while ensuring robust stability of a closed system the invariant ellipsoids method is used, which reduces the synthesis of optimal controller to a problem of the search for the smallest invariant ellipsoid of the closed system. Using linear matrix inequalities the controller synthesis problem is reduced to a sequence of semidefinite programming problems, that are solved numerically in real time. A descriptor system approach with parameter-dependent Lyapunov function is used to reduce the degree of conservatism of control results. A necessary and sufficient conditions of the control existence for a constrained robust guaranteeing inventory control synthesis problem in supply networks are formulated. A problem of estimating the allowable region in the space of control actions is formulated in terms of solvability of bilinear matrix inequalities system, for solution of which an iterative algorithm is proposed. A mathematical model of the water distribution system as an automatic control object in the form of a set of linear subsystems with nonlinear relationships under condition of the existence of a quadratic constraints on their values is developed. A problem of pumping stations modes control automation in the centralized water supply system is solved.

Keywords: automated control system, control object simulation, supply network, robust inventory control, invariant ellipsoids method, linear matrix inequalities, parameter-dependent Lyapunov function, descriptor system approach.

Підп. до друку 10.05.2016 р. Формат 60×90/16.
Гарнітура Times New Roman. Папір офсетний.
Друк ризографічний. Умовн. друк. арк. 1,9.
Наклад 100 прим. Замовлення № 670423.

Надруковано у СПДФО Ковальчук Н. П.
Свідоцтво № 24800000000150925 від 01.08.2013 р.
61003, м. Харків, пр. Московський, 10/12